Семинары 9-10. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.

2.208. При каком значении параметра λ плоскость P будет параллельна прямой L?
$P: 5x - 3y + \lambda z + 1 = 0$, L: $\begin{cases} x - 4z - 1 &= 0 \\ y - 3z + 2 &= 0 \end{cases}$.
$\triangleleft$ Направляющий вектор прямой L

$$\bar{q}_L = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 4\bar{\imath} + 3\bar{\jmath} + \bar{k};$$

$P \parallel L \Rightarrow \bar{n}_P \perp \bar{q}_L$, т.е. $\bar{n}_P \cdot \bar{q}_L = 4 \cdot 5 - 3 \cdot 3 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -11.$ $\triangleright$

2.214. Для прямых L_1: $\dfrac{x+7}{3} = \dfrac{y+4}{4} = \dfrac{z+3}{-2}$ и L_2: $\dfrac{x-21}{6} = \dfrac{y+5}{-4} = \dfrac{z-2}{-1}$
а) доказать, что прямые не лежат в одной плоскости, т.е. являются скрещивающимися;
б) написать уравнение плоскости, проходящей через прямую L_2 параллельно L_1;
в) вычислить расстояние между прямыми;
г) написать уравнения общего перпендикуляра к прямым L_1 и L_2.
$\triangleleft$ а) Обозначим $M_1(-7, -4, -3)$, $M_2(21, -5, 2)$.

$$\overline{M_1M_2}\bar{q}_1\bar{q}_2 = \begin{vmatrix} 28 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -112 + 12 - 60 - 120 - 224 - 3 = -507 \neq 0.$$

б) $\bar{q}_1 \times \bar{q}_2 = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -12\bar{\imath} - 9\bar{\jmath} - 36\bar{k}$; $\bar{n} = 4\bar{\imath} + 3\bar{\jmath} + 12\bar{k}$. Уравнение плоскости:

$$4(x - 21) + 3(y + 5) + 12(z - 2) = 0$$

или

$$4x + 3y + 12z - 93 = 0.$$

в) $\rho = \dfrac{|\overline{M_1M_2}\bar{q}_1\bar{q}_2|}{|\bar{q}_1 \times \bar{q}_2|} = \dfrac{507}{3\sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2}} = \dfrac{507}{3\sqrt{169}} = \dfrac{507}{3 \cdot 13} = 13.$
г)

<u>Способ 1.</u>

$$\bar{n} \times \bar{q}_1 = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 4 & 3 & 12 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -54\bar{\imath} + 44\bar{\jmath} + 7\bar{k};$$

Первая плоскость:

$$-54(x + 7) + 44(y + 4) + 7(z + 3) = 0$$

$$-54x + 44y + 7z - 181 = 0.$$

$$\bar{n} \times \bar{q}_2 = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 4 & 3 & 12 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 45\bar{\imath} + 76\bar{\jmath} - 34\bar{k};$$

Вторая плоскость:

$$45(x-21)+76(y+5)-34(z-2)=0$$
$$45x+76y-34z-497=0.$$

Общие уравнения общего перпендикуляра:

$$\begin{cases} -54x+44y+7z-181 &= 0 \\ 45x+76y-34z-497 &= 0. \end{cases}$$

<u>Способ 2.</u>

Запишем параметрические уравнения прямых L_1 и L_2:

$$\begin{cases} x &= -7+3t \\ y &= -4+4t \\ z &= -3-2t \end{cases} \qquad \begin{cases} x &= 21+6s \\ y &= -5-4s \\ z &= 2-s. \end{cases}$$

Пусть теперь t и s — параметры точек пересечения общего перпендикуляра с прямыми. Направляющий вектор перпендикуляра известен (с точностью до множителя), поэтому

$$\begin{cases} 21+6s-(-7+3t) &= r\cdot 4 \\ -5-4s-(-4+4t) &= r\cdot 3 \\ 2-s-(-3-2t) &= r\cdot 12. \end{cases}$$

Получаем СЛАУ

$$\begin{cases} 6s-3t-4r &= -28 \\ -4s-4t-3r &= 1 \\ -s+2t-12r &= -5. \end{cases}$$

$$s=\frac{\Delta_s}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} -28 & -3 & -4 \\ 1 & -4 & -3 \\ -5 & 2 & -12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -4 & -4 & -3 \\ -1 & 2 & -12 \end{vmatrix}}=\frac{-1344-45-8+80-168-36}{288-9+32+16+36+144}=\frac{-1521}{507}=-3;$$

другие неизвестные системы нам знать необязательно. (На всякий случай: $t=2$, $r=1$.) Точка на прямой L_2, через которую проходит общий перпендикуляр — $(3,7,5)$. Его канонические уравнения:

$$\frac{x-3}{4}=\frac{y-7}{3}=\frac{z-5}{12}. \triangleright$$

1.

① Показать, что прямые L_1 и L_2 пересекаются, найти точку пересечения и составить ур-е плоскости, кот. они принадлежат.

$L_1: \frac{x-2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{1}$; $L_2: \frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{1}$

Решение: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$ пересекаются

$C(0;1;-2)$ – точка пересечения

NOTES $2x+y-3z=7$ – пл-ть, кот. они принадл.

Комментарии к решению: прямые пересекаются, если $\overline{AB}\vec{q}_1\vec{q}_2=0$, где $A\in L_1$, $B\in L_2$, $\vec{q}_1$ — направляющий вектор прямой L_1, $\vec{q}_2$ — направляющий вектор прямой L_2. Чтобы составить уравнение плоскости, можно раскрыть определитель

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z+2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2.

② Среди плоскостей, проходящих через прямую $\{x=1+t;\ y=2-t;\ z=3+2t\}$ найти ту, что $\perp$-на $P: x+y+z=10$.

Задача решается двумя способами:

Решение: I. $A(1;2;3)\in L$, $\bar{q}\{1;-1;2\}\parallel L$, $\bar{n}_P\{1;1;1\}\perp P$.
Уравнение искомой пл-ти найдем из опр-ля:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \underline{-3x+y+2z-5=0}$$

II. С помощью понятия пучка плоскостей
Сначала нужно записать ур-е прямой в виде пер-я двух плоскостей (будем исп-ть проекционные пл-ти)

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{2}$$

$$x+y=3 \qquad 2y+z=7$$

Уравнение пучка плоскостей:

$$(x+y-3)+\alpha(2y+z-7)=0 \text{ или}$$

$$x+(1+2\alpha)+\alpha z-3-7\alpha=0$$

Условие перп-ти пл-тей (пер-ть их нормалей):

$$1\cdot 1+1\cdot(1+2\alpha)+1\cdot\alpha=0 \Rightarrow \alpha=-2/3 \Rightarrow$$

Уравнение заданной прямой

$$3(x+y-3)-2(2y+z-7)=0 \Rightarrow \underline{3x-y-2z+5=0}$$

3.

(3) Показать, что прямая

$$\begin{cases} x + y + z - 9 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

$\parallel$ пл-ти $P: x - 5y - 3z + 7 = 0$

и найти расст-е м/у ними

<u>Решение:</u>

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} = \overline{n_1}\,\overline{n_2}\,\overline{n_p} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ параллельны

Для нахождения расст-е дост-но взять одну точку прямой и найти расст-е до пл-ти

$A(3;3;3)$ - произв. точка прямой

$$\rho(A,P) = \frac{|3 - 15 - 9 + 7|}{\sqrt{1+25+9}} = \frac{2}{5}\sqrt{35}.$$

4.

(4) Напишите парам. уравнения прямой, кот. проходит через точку $M(0;1;4)$ и перес. прямые $L_1: \frac{x-3}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{1}$; $L_2: \frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-1}{-1}$

<u>Решение:</u> 1) Ур-е пл-ти через т. $M(0;1;4)$ и L_1:

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-4 \\ 3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - y + z - 3 = 0.$$

2) Ур-е пл-ти через M и L_2.

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-4 \\ 5 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y + z - 5 = 0$$

3) Искомая прямая - пересечение пл-тей

$$L: \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ y + z - 5 = 0 \end{cases}, \quad M(0;1;4) \in L$$

$$\bar{q} = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\bar i - 2\bar j + 2\bar k \parallel \{1;1;-1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

5.

(5) Составить канон. ур-е общего перп-ра к прямым

$L_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{-1}$; $L_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{0}$

Решение: $\bar{q}\{2;1;1\}$ – направл. в-р этой прям.

$$\begin{cases} x = 2+2t \\ y = -1-3t \\ z = -t \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1+s \\ y = -2s \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \begin{cases} -2t+s+2r = 3 \\ 3t-2s+r = -1 \\ t+0s+r = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow t = -\frac{5}{3}; s = -\frac{5}{3} \Rightarrow A\left(-\frac{4}{3}; 4; \frac{5}{3}\right)$.

Уравнение общего перп-ра:

$$\begin{cases} x = -\frac{4}{3}+2t \\ y = 4+t \\ z = \frac{5}{3}+t. \end{cases}$$

Проекции и симметрии.

Решим сначала несколько вспомогательных задач.

*.

(*) Найти точку пер-е прямой и плоскости

$L: \frac{x+3}{-1} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{3}$; $P: x-2y-z+3=0$.

Решение: Запишем парам. ур-е прямой

$$\begin{cases} x = -3-t \\ y = -3t \\ z = -2+3t \end{cases}$$

Подставим в ур-е пл-ти и найдем пар-р:

$-3-t-2(-3t)-(-2+3t)+3=0 \Rightarrow t=-1$

Ответ: $A_0(-2;3;-5)$.

**.

(**) Найти проекцию т. A на плоскость

т. $A(-2;4;4)$; $P: 2x-3y+z-2=0$.

Решение: 1) прямая, прох. через т. A $\perp$ P:

$\frac{x+2}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-4}{1}$

2) Точка их пересечения $(t=1)$ $A_0(0;1;5)$

Ответ: $A_0(0;1;5)$.

*.

(*) Найти проекцию т. $M(0;1;-1)$ на прямую

$L: \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-6}{-4} = \dfrac{z+1}{1}$

Решение: 1) Ур-е пл-ти, прох. через т. M $\perp$-но L:

$3x - 4y + z + 5 = 0$

2) Точка пересечения этой прямой и пл-ти

$(t=1) \Rightarrow M_0(1;2;0)$.

2.209.

2.209 Найти уравнение проекции прямой

$\dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{4}$ на пл-ть $x - 3y - z + 8 = 0$

Решение: 1) Пл-ть, прох. через прямую $\perp$-но пл-ти

$$\begin{vmatrix} x-4 & y+1 & z \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + y - z - 7 = 0$$

2) Искомая прямая — пересеч-е этих пл-тей

$$\begin{cases} 2x + y - z - 7 = 0 \\ x - 3y - z + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x-15}{-4} = \frac{y}{1} = \frac{z-23}{-7}$$

*.

(*) Найти точку, симметричную точке $M(5;2;-1)$ отн-но плоскости $P: 2x - y + 3z + 23 = 0$.

Решение: 1) Ур-е прямой, $\perp$-ной P через т. M:

$$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$$

2) Найдем проекцию т. M на P:

$t = -2 \Rightarrow M_0(1;4;-7)$.

3) Вектор $\overline{MM_0}\{-4;2;-6\} \Rightarrow \overline{MM_1}\{-8;4;-12\}$.

4) Координаты т. $M_1(-3;6;-13)$.

**.

(**) Найти точку, симметричную т. $M(0;-3;-2)$ отн-но прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1{,}5}{-1}=\frac{z}{1}$

Решение: 1) Ур-е пл-ти, прох. через т. M $\perp$-но L:

$x-y+z-1=0$

2) Проекция M_0 т. M на прямую

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=-1{,}5-t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow t=-1{,}5 \Rightarrow M_0\left(-\tfrac{1}{2};0;-\tfrac{3}{2}\right).$$

3) $\overline{MM_0}\left\{-\tfrac{1}{2};3;-\tfrac{1}{2}\right\} \Rightarrow \overline{MM_1}\{-1;6;-1\}$

4) коор-ты т. M_1: $M_1(-1;3;-3)$

Теперь будем находить координаты точек, симметричной относительно прямой и строить прямые, симметричные относительно прямой.

6.

(6) Найти точку, симметричную т. $M(1;1;1)$ отн-но прямой

$$L:\begin{cases} 5x+2y-z-6=0 \\ 2x+2y+2z-3=0 \end{cases}$$

Решение: 1) Ур-е пл-ти, прох. через т. M $\perp$-но L:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow x-2y+z=0$$

2) Точка пер-я этой пл-ти и иск. прямой

$$\begin{cases} 5x+2y-z-6=0 \\ 2x+2y+2z-3=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow M_0\left(1;\tfrac{1}{2};0\right)$$

3) $\overline{MM_0}\left\{0;-\tfrac{1}{2};-1\right\} \Rightarrow \overline{MM_1}\{0;-1;-2\}$.

4) коор-ты т. $M_1(1;0;-1)$.

Ответ: $M_1(1;0;-1)$.

7.

(7) Составить канон. ур-е прямой, симметричной прямой

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$$

отн-но плоскости $x+2y-z+6=0$.

Решение: 1) $A(1;0;1)\in L$, $A\notin P$. Прямая, прох. через т. A $\perp$-но P:

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=1-t \end{cases}$$

2) Точка пер-я этой прямой и плоскости:

$\cancel{t=1 \Rightarrow M(-2;-1;2)}$ $t=-1 \Rightarrow B(0;-2;2)$

$\vec{AB}\{-1;-2;1\} \Rightarrow \vec{AC}\{-2;-4;2\} \Rightarrow C(-1;-4;3)$ — точка, симм. т. A отн-но прямой

3) Найдем точку пер-я L и P:

$$\begin{cases} x=1+3t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases} \Rightarrow t=-1 \Rightarrow M(-2;-1;2).$$

4) Проводим прямую через т. M и C:

$$\frac{x+2}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{-1}.$$

(Д/з) 2.206, 210, 215, 217, 218.