Семинары 7-8. Прямые и плоскости в пространстве

Плоскость в декартовой системе координат может быть задана

- векторным уравнением $\bar{n}(\bar{r} - \bar{r}_0) = 0$;
- общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$;
- уравнением в отрезках $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$;
- нормальным уравнением $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$;
- параметрическими уравнениями $\begin{cases} x &= x_0 + ue_{1x} + ve_{2x} \\ y &= y_0 + ue_{1y} + ve_{2y} \\ z &= z_0 + ue_{1z} + ve_{2z} \end{cases}$.

2.180(а). Заданы плоскость P: $-2x+y-z+1 = 0$ и точка $M(1,1,1)$. Написать уравнение плоскости P', проходящей через M параллельно P и вычислить расстояние между двумя плоскостями.

$\triangleleft$ $\bar{n} = \bar{n}_P = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$; $\overline{OM} \cdot \bar{n}_P = -2$; уравнение плоскости P $-2x + y - z + 2 = 0$. Выберем на плоскости P точку $N(0,0,1)$. $\overline{NM} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$;

$\rho(P, P') = \left|\text{пр}_{\bar{n}}\overline{NM}\right| = \left|\dfrac{\overline{NM}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|}\right| = \left|\dfrac{-1}{\sqrt{6}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$. $\triangleright$

2.181(а). Написать уравнение плоскости P', проходящей через точки $M_1(1,2,0)$ и $M_2(2,1,1)$ перпендикулярно плоскости P: $-x + y - 1 = 0$.

$\triangleleft$ $\overline{M_1M_2} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\bar{n} = \overline{M_1M_2} \times \bar{n}_P = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$; $\bar{n}\overline{OM_1} = -3$.

Ответ: $-x - y + 3 = 0$. $\triangleright$

2.182(а). Написать уравнение плоскости P', проходящей через точку $M(1,1,1)$ параллельно векторам $\bar{a}_1(0,1,2)$ и $\bar{a}_2(-1,0,1)$.

$\triangleleft$ $\bar{n} = \bar{a}_1 \times \bar{a}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\bar{n}\overline{OM} = 0$. Ответ: $x - 2y + z = 0$. $\triangleright$

2.183(а). Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1,2,0)$ и $M_2(2,1,1)$ параллельно вектору $\bar{a}(3,0,1)$.

$\triangleleft$ $\overline{M_1M_2} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\bar{n} = \overline{M_1M_2} \times \bar{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; $\bar{n}\overline{OM_1} = 3$;

Ответ: $-x + 2y + 3z - 3 = 0$. (В задачнике в ответе опечатка.) $\triangleright$

2.184(б). Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(1,1,1)$, $M_2(0,-1,2)$ и $M_3(2,3,-1)$.

$\triangleleft$ $\overline{M_1M_2} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\overline{M_1M_3} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$; Пусть $M(x,y,z)$ — точка, принадлежащая плоскости; тогда

$$\overline{M_1M_2}\,\overline{M_1M_3}\,\overline{M_1M} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ x-1 & y-1 & z-1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ x-1 & y-1 & z-1 \end{vmatrix} = 2(x-1)-(y-1)+0(z-1) = 2x-y-1. \text{ Ответ: } 2x-y-1=0. \ \triangleright$$

2.185. Исследовать взаимное расположение двух плоскостей P_1: $-x+2y-z+1=0$ и P_2: $y+3z-1=0$. Если они пересекаются, то найти косинус угла между ними, если нет — расстояние между плоскостями.

$\triangleleft$ Нормальные векторы плоскостей не коллинеарны, значит, они не параллельны, т.е. пересекаются. Угол между плоскостями всегда $\leqslant 90°$, поэтому

$$\cos(\widehat{P_1, P_2}) = \left|\cos(\widehat{n_1, n_2})\right| = \frac{|-1|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{60}}$$

Ответ: $\cos(\widehat{P_1, P_2}) = \dfrac{1}{2\sqrt{15}}$. $\triangleright$

2.190. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1,7,-5)$ и отсекающей от осей координат положительные и равные отрезки.

$\triangleleft$ Будем искать уравнение плоскости в отрезках: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}+\dfrac{z}{a}=1, \quad a>0;$

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{7}{a}+\dfrac{-5}{a}=\dfrac{3}{a}=1 \Rightarrow a=3$; Ответ: $x+y+z=3$. $\triangleright$

2.196. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1,1,-1)$ и перпендикулярной к плоскостям P_1: $2x-y+5z+3=0$ и P_2: $x+3y-z-7=0$.

$\triangleleft$ $\bar{n}_1 = 2\mathbf{i}-\mathbf{j}+5\mathbf{k}$, $\bar{n}_2 = \mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$.

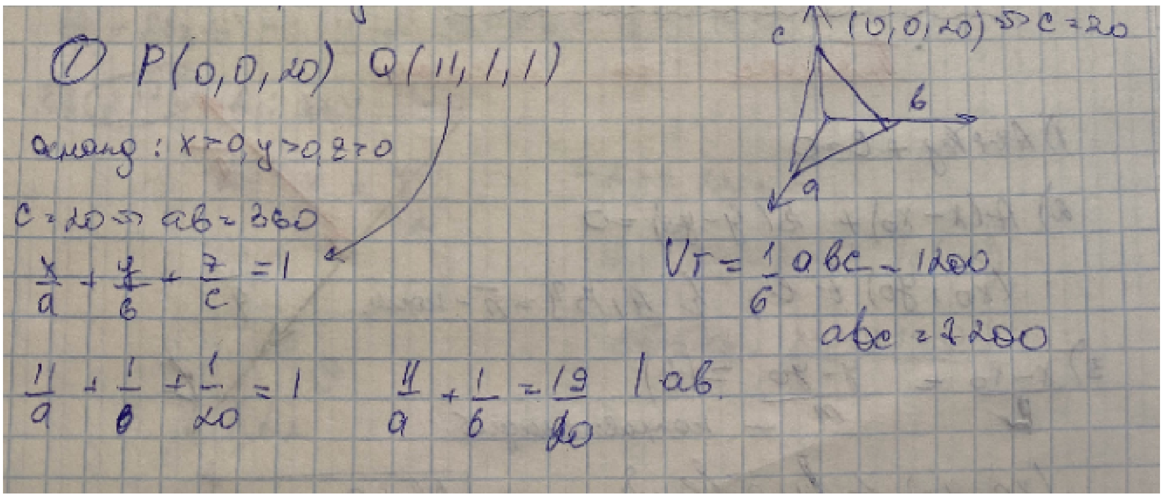
$$\bar{n}_1\times\bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -14\mathbf{i}+7\mathbf{j}+7\mathbf{k}; \text{ возьмём } \bar{n} = -2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}.\ \bar{n}\overline{OA} = -2.$$

Ответ: $-2x+y+z+2=0$. $\triangleright$

1. Найти общие уравнения плоскостей, которые проходят через точки $P(0,0,20)$ и $Q(11,1,1)$ и отсекает от положительного координатного октанта тетраэдр объема 1200.

$\triangleleft$ Будем использовать уравнение плоскости в отрезках: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

При этом объем такого тетраэдра равен $V=\dfrac{1}{6}abc=1200$.



$$11b+a=\frac{19}{\cancel{20}}\cdot\cancel{360}^{18}$$

$$11b+a=342.$$

$$\begin{cases} 11b+a=342 \\ ab=360 \end{cases} \qquad a=342-11b$$

$$b(342-11b)=360$$

$$342b-11b^2-360=0$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b_1=\frac{12}{11} \\ a_1=330 \end{cases} \\ \begin{cases} b_2=30 \\ a_2=12. \end{cases} \end{array}\right.$$

1) $\frac{x}{12}^{5}+\frac{y}{30}^{2}+\frac{z}{20}^{3}=1 \quad \Big|\cdot 60$

$$5x+2y+3z-60=0$$

2) $\frac{x}{330}^{2}+\frac{11y}{12}^{55}+\frac{z}{20}^{33}=1 \quad \Big|\cdot 660$

$$2x+605y+33z-660=0$$

Прямые на плоскости

Прямая на плоскости м.б. задана

1) $Ax+By+C=0$ — общее уравнение

2) $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ — прямая, прох. через точку $M_0(x_0,y_0)$ с нормальным в-ром $\vec{n}\{A;B\}$

3) $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$ — канон. уравнение прямой, прох. через т. $M(x_0;y_0)$ с направл. в-ром $(\vec{l};\vec{m})$.

4) $\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \end{cases}$ — парам. уравнение прямой

5) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ — уравнение прямой в отрезках

6) $x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0$ — нормальное ур-е прям.
$(\cos\alpha,\cos\beta)$ — направл. косинусы норм. в-ра; p — расстояние от начала координат

Уравнение прямой по 2 точкам:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

2.144а) Дана прямая $L: -2x+y-1=0$ и т. $M(-1;2)$.
Требуется:
1) вычислить расстояние $\rho(M,L)$ от т. M до L
2) написать ур-е прямой L', прох. через $M \perp L$
3) написать ур-е прямой L', прох. через $M \parallel L$.

Решение: 1) Формула расстояния от точки до прямой на плоскости

$$\rho(M,L) = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|-2\cdot(-1)+2-1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

2) $\bar{n}\{-2;1\}$ – нормаль $L \Rightarrow \{-2;1\}$ – направл. вектор $L' \Rightarrow \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-2}{1} \Rightarrow 2y+x=3$

3) $\bar{n}\{-2;1\}$ – нормаль $L \Rightarrow \{-2;1\}$ – нормальн. вектор $L' \Rightarrow -2(x+1)+1\cdot(y-2)=0 \Rightarrow -2x+y=4$.

2.148. Исследовать случай взаимного расположения прямых на плоскости:

$$L_1\colon x+y-1=0, \quad L_2\colon \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-2}.$$

2.148 $L_1: x+y-1=0$

$L_2: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{-2}$ $\quad -2x = 2y+2$

$-2x-2y-2=0 \quad |:(-2)$

$\cancel{2x+2y}$ $x+y+1=0$.

$\Downarrow$

$L_1 \parallel L_2$

2.150а) Треугольник ABC задан координатами своих вершин, $A(1;2)$, $B(2;-2)$, $C(6;1)$. Требуется:
1) написать уравнение стороны AB;
2) написать ур-е высоты CD и вычислить ее длину
3) найти угол φ м/у высотой (CD) и мед. BM
4) написать ур-е биссектрис L_1 и L_2 внутреннего и внешнего углов при верш. A.

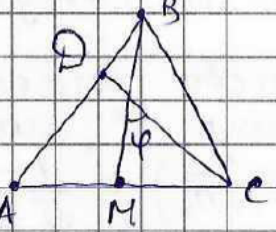
Решение: 1) $\overline{AB}\{1;-4\} \Rightarrow \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-4} \Rightarrow 4x+y=6.$

2) $\bar{n}\{4;1\}$ – нормаль к AB и направл. в-р $CD \Rightarrow$

$\frac{x-6}{4}=\frac{y-1}{1} \Rightarrow 4y-x=-2$ или $x-4y=2$

Длина CD – расст-е от т. C до прямой AB:

$\rho(C, AB)=\frac{|4\cdot 6+1-6|}{\sqrt{17}}=\frac{19}{\sqrt{17}}.$



3) Найдем сначала коор-ты т. $M\left(\frac{7}{2};\frac{3}{2}\right)$. Ур-е BM:

$\frac{x-2}{\frac{7}{2}-2}=\frac{y+2}{\frac{3}{2}+2} \Rightarrow \frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{7}$

$\bar{n}_1=\{3;7\}$ – направл. вектор BM

$\bar{n}_2=\{4;1\}$ – направл. вектор CD

$\cos(\widehat{BM;CD})=\frac{12+7}{\sqrt{9+49}\cdot\sqrt{17}}=\frac{19}{\sqrt{17\cdot 58}}=\frac{19}{\sqrt{986}}.$

4) $\overline{AB}\{1;-4\}$; $\overline{AC}\{5;-1\}$

$\bar{a}_0\left\{\frac{1}{\sqrt{17}};-\frac{4}{17}\right\}$; $\bar{b}_0\left\{\frac{5}{\sqrt{26}};-\frac{1}{\sqrt{26}}\right\}$ – их орты

$\bar{a}_0+\bar{b}_0\left\{\frac{1}{\sqrt{17}}+\frac{5}{\sqrt{26}};-\frac{4}{\sqrt{17}}-\frac{1}{\sqrt{26}}\right\}$ – направл. в-р L_1 и нормаль L_2

$\Rightarrow L_1: \frac{x-1}{\sqrt{26}+5\sqrt{17}}=\frac{y-2}{-4\sqrt{26}-\sqrt{17}}$

$L_2: (\sqrt{26}+5\sqrt{17})(x-1)+(-4\sqrt{26}-\sqrt{17})(y-2)=0.$

2. составить общие уравнения биссектрисы L' острого угла и L'' тупого угла между прямыми $x+y=0$ и $7x-y=8$.

Решение: Точка пересечения прямых

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 7x-y=8 \end{cases} \Rightarrow A(1;-1).$$

$L_1: x+y=0 \Rightarrow x=-y \Rightarrow \frac{x}{1}=\frac{y}{-1} \Rightarrow \bar{n}_1\{1;-1\}$

$L_2: 7x-y=8 \Rightarrow 7(x-1)=y+1 \Rightarrow \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{7} \Rightarrow \bar{n}_2\{1;7\}$

Орты направл. векторов:

$$n_{10}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\};\ \bar{n}_{20}\left\{\frac{1}{\sqrt{50}}; \frac{7}{\sqrt{50}}\right\}$$

$$\bar{n}_{10}+\bar{n}_{20}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{50}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{7}{\sqrt{50}}\right\}=\left\{\frac{6}{\sqrt{50}}; \frac{2}{\sqrt{50}}\right\} \parallel \{3;1\}$$

$\bar{n}\{3;1\}$ – направл. в-р одной из искомых прямых и норм. в-р другой

1) $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{1} \Rightarrow x-3y=4$

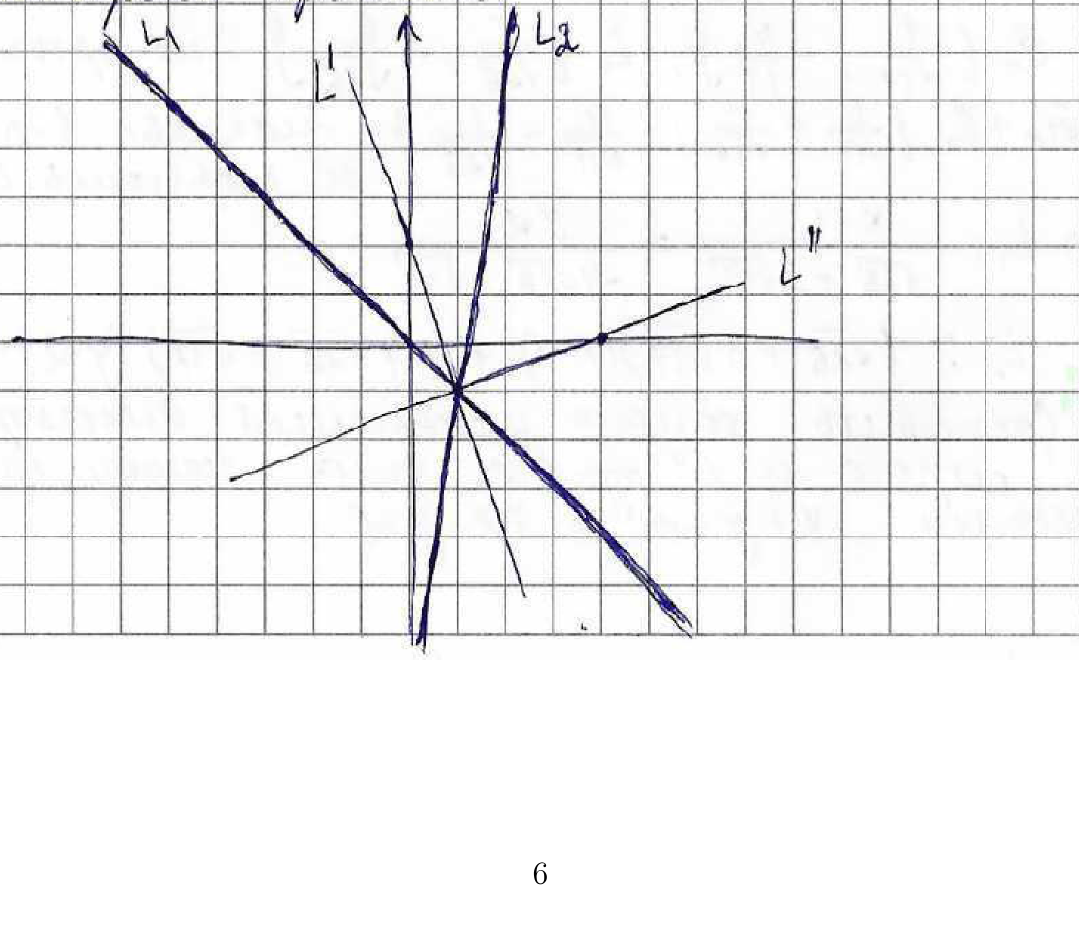
2) $3(x-1)+1(y+1) \Rightarrow 3x+y=2$

Чтобы выяснить, какая из прямых L', а какая L'', найдем косинус м/у $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$:

$\cos(\bar{n}_1 \hat{,} \bar{n}_2)=\frac{1-7}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{50}}<0 \Rightarrow \{3;1\}$ – направл. в-р тупого угла $\Rightarrow$

$\Rightarrow L'': x-3y=4$; $L': 3x+y=2$

Можно установить геометрически, построив прямые.



Прямая в пространстве.

Прямая в пространстве может быть задана

- векторным уравнением $\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + t\bar{q}$;
- параметрическими уравнениями $\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & x_0 + lt \\ y(t) & = & y_0 + mt \\ z(t) & = & z_0 + nt \end{array} \right.$;
- каноническими уравнениями $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$;
- общими уравнениями $\left\{ \begin{array}{lcl} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 & = & 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 & = & 0 \end{array} \right.$;
- уравнениями в проекциях.

2.197(а). Прямая L задана общими уравнениями:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y + 2z - 3 & = & 0 \\ x + 2y - z - 1 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Написать для этой прямой канонические уравнения и уравнения в проекциях.

$\triangleleft$ Направляющий вектор прямой

$$\bar{q} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3\bar{\imath} + 4\bar{\jmath} + 5\bar{k}.$$

Выберем произвольную точку на прямой. Если положим $z = 0$, то получим точку $B(7/5, -1/5, 0)$. Тогда каноническое уравнение

$$\frac{x - 7/5}{-3} = \frac{y + 1/5}{4} = \frac{z}{5}.$$

Исключая по очереди каждую из переменных из общих уравнений, получим уравнения в проекциях:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4x + 3y - 5 & = & 0 \\ 5x + 3z - 7 & = & 0 \\ 5y - 4z + 1 & = & 0 \end{array} \right. . \triangleright$$

2.198. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2, 0, -3)$ параллельно:

а) вектору $\bar{q}(2, -3, -5)$; б) прямой $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$;

в) оси Ox; г) оси Oz;

д) прямой $\left\{ \begin{array}{rcl} 3x - y + 2z - 7 & = & 0 \\ x + 3y - 2z - 3 & = & 0 \end{array} \right.$; е) прямой $x = -2 + t,\ y = 2t,\ z = 1 - t/2$.

$\triangleleft$ а) $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+3}{5}$; б) $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+3}{1}$; в) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z+3}{0}$;

г) $\dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z+3}{1}$;

д) $(3\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k})\times(\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}) = -4\mathbf{i}+8\mathbf{j}+10\mathbf{k}$; $\dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z+3}{5}$; е) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+3}{-1/2}$.
$\triangleright$

2.200(а). Заданы прямая L: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{0}$ и точка $M(0,1,2) \notin L$ (проверить!). Требуется:

а) написать уравнение плоскости, проходящей через прямую L и точку M;

б) написать уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно прямой L;

в) написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую L;

г) вычислить расстояние от M до L;

д) найти проекцию точки M на прямой L.

$\triangleleft$ а) Обозначим $A(1,0,-1)$, $\bar{q} = 2\bar{\imath} + \bar{\jmath}$. Нормальный вектор плоскости

$$\bar{n} = \overline{AM} \times \bar{q} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3\bar{\imath} + 6\bar{\jmath} - 3\bar{k}.$$

Уравнение плоскости: $-3x + 6(y-1) - 3(z-2) = -3x + 6y - 3z = 0$ или $x - 2y + z = 0$.

б) $2(x-0) + 1(y-1) = 0$ или $2x + y - 1 = 0$.

в) Искомая прямая есть пересечение плоскостей из пунктов а) и б), поэтому её общие уравнения

$$\begin{cases} x - 2y + z &= 0 \\ 2x + y - 1 &= 0 \end{cases}$$

(каноническое уравнение — $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{5}$).

г) $l = \dfrac{|\overline{AM} \times \bar{q}|}{|\bar{q}|} = \dfrac{3\sqrt{1+2^2+1}}{\sqrt{2^2+1}} = \dfrac{3\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$.

д) Искомая точка — точка пересечения прямой из пункта в) и прямой L. Подставляя в общие уравнения в) $z = -1$, получим $M'(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, -1)$. $\triangleright$

2.204. Найти расстояние между параллельными прямыми

$$L_1: \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2} \quad \text{и} \quad L_2: \quad \frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}.$$

$\triangleleft$ $A_1(2,-1,0) \in L_1$, $A_2(7,1,3) \in L_2$, $\overline{A_1A_2} = \{5,2,3\}$, $\bar{q} = \{3,4,2\}$.

$$\overline{A_1A_2} \times \bar{q} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 5 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -8\bar{\imath} - \bar{\jmath} + 14\bar{k};$$

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{|\overline{A_1A_2} \times \bar{q}|}{|\bar{q}|} = \frac{\sqrt{64+1+196}}{\sqrt{9+16+4}} = \frac{\sqrt{261}}{\sqrt{29}} = \sqrt{9} = 3. \ \triangleright$$

2.205(а). Найти расстояние от точки $A(2,3,-1)$ до прямой L: $\begin{cases} 2x & -2y & +z & +3 & = & 0 \\ 3x & -2y & +2z & +17 & = & 0 \end{cases}$.

$\triangleleft$ Направляющий вектор прямой

$$\bar{q} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2\bar{\imath} - \bar{\jmath} + 2\bar{k}.$$

Выберем произвольную точку на прямой. Если положим $z = 0$, то получим точку $B(-14, -25/2, 0)$. Тогда

$$l = \frac{|\overline{AB} \times \bar{q}|}{|\bar{q}|} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -16 & -31/2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \right\|}{3} = \frac{\left|-30\bar{\imath} + 30\bar{\jmath} - 15\bar{k}\right|}{3} = 15. \triangleright$$

Д/З 2.143 б, в, 147, 149, 150 б; 180 б, 181 б, 182 б, 183 б, 184 а, 187, 188, 189, 195; 197 б, 199, 201, 203 б, 205 б, 206.