Семинары 5-6. Векторное и смешанное произведение векторов

Упорядоченную тройку некомпланарных векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называют *правой*, если кратчайший поворот вектора $\bar{a}$ в сторону вектора $\bar{b}$ происходит против часовой стрелки со стороны вектора $\bar{c}$. В противном случае тройка векторов называется *левой*.

Векторным произведением $\bar{a}\times\bar{b}$ векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, который удовлетворяет трём условиям:

1. Вектор $\bar{c}$ ортогонален векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

2. Длина вектора $\bar{c}$ равна площади параллелограмма, построеннного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, то есть $|\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$;

3. Упорядоченная тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ является правой.

Свойства векторного произедения:
1° $\bar{a}\times\bar{b} = -\bar{b}\times\bar{a}$ (антикоммутативность);
2° $(\lambda\bar{a})\times\bar{b} = \lambda(\bar{a}\times\bar{b})$ (ассоциативность относительно умножения на число);
3° $\bar{a}\times(\bar{b}_1+\bar{b}_2) = \bar{a}\times\bar{b}_1+\bar{a}\times\bar{b}_2$ (дистрибутивность относительно сложения).
Два вектора коллинеарны $\bar{a}$ и $\bar{b}$ тогда и только тогда, когда $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{0}$.

Если два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы координатами в правом ортонормированном базисе, то их векторное произведение может быть вычислено по символической формуле

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}.$$

2.98. $|\bar{a}_1| = 1$, $|\bar{a}_2| = 2$, $(\widehat{\bar{a}_1,\bar{a}_2}) = 2\pi/3$. Вычислить:
а) $|\bar{a}_1\times\bar{a}_2|$; б) $|(2\bar{a}_1+\bar{a}_2)\times(\bar{a}_1+2\bar{a}_2)$.

◁ а) $|\bar{a}_1\times\bar{a}_2| = |\bar{a}_1||\bar{a}_2|\sin(\widehat{\bar{a}_1,\bar{a}_2}) = 1\cdot 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$; ▷

◁ б) $(2\bar{a}_1+\bar{a}_2)\times(\bar{a}_1+2\bar{a}_2) = 2\bar{a}_1\times\bar{a}_1+4\bar{a}_1\times\bar{a}_2+\bar{a}_2\times\bar{a}_1+2\bar{a}_2\times\bar{a}_2 = 3\bar{a}_1\times\bar{a}_2$;
$|3\bar{a}_1\times\bar{a}_2| = 3\cdot 1\cdot 2\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$. ▷

2.99. Какому условию должны удовлетворять векторы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$, чтобы векторы $\bar{a}_1+\bar{a}_2$ и $\bar{a}_1-\bar{a}_2$ были коллинеарны?

◁ $(\bar{a}_1+\bar{a}_2)\times(\bar{a}_1-\bar{a}_2) = \bar{a}_1\times\bar{a}_1-\bar{a}_1\times\bar{a}_2+\bar{a}_2\times\bar{a}_1-\bar{a}_2\times\bar{a}_2 = -2\bar{a}_1\times\bar{a}_2$;

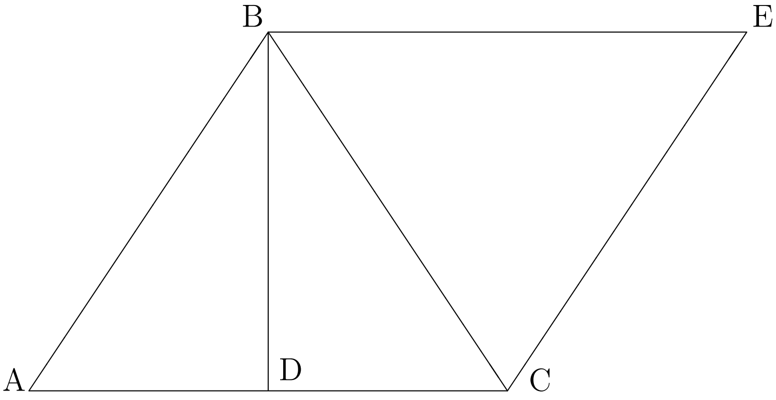
Таким образом, $\bar{a}_1+\bar{a}_2$ и $\bar{a}_1-\bar{a}_2$ коллинеарны тогда и только тогда, когда коллинеарны $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$. ▷

2.100. Упростить выражения:
а) $\bar{\imath}\times(\bar{\jmath}+\bar{k})-\bar{\jmath}\times(\bar{\imath}+\bar{k})+\bar{k}\times(\bar{\imath}+\bar{\jmath}+\bar{k})$, где $(\bar{\imath},\bar{\jmath},\bar{k})$ – правый ортонормированный базис;
б) $(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})\times\bar{c}+(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})\times\bar{b}+(\bar{b}-\bar{c})\times\bar{a}$.

◁ а) $\bar{\imath}\times(\bar{\jmath}+\bar{k})-\bar{\jmath}\times(\bar{\imath}+\bar{k})+\bar{k}\times(\bar{\imath}+\bar{\jmath}+\bar{k}) = \bar{\imath}\times\bar{\jmath}+\bar{\imath}\times\bar{k}-\bar{\jmath}\times\bar{\imath}-\bar{\jmath}\times\bar{k}+\bar{k}\times\bar{\imath}+\bar{k}\times\bar{\jmath}+\bar{k}\times\bar{k} = 2\bar{k}-2\bar{\imath}$.
$= 2\bar{\imath}\times\bar{\jmath}-2\bar{\jmath}\times\bar{k} = 2\bar{k}-2\bar{\imath}$. ▷

◁ б) $(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})\times\bar{c}+(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})\times\bar{b}+(\bar{b}-\bar{c})\times\bar{a} = \bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c}+\bar{a}\times\bar{b}+\bar{c}\times\bar{b}+\bar{b}\times\bar{a}-\bar{c}\times\bar{a} =$
$= 2\bar{a}\times\bar{c}$. ▷

2.108. В треугольнике с вершинами $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$ и $C(1,3,-1)$ найти высоту $|\overline{BD}|$.



$\triangleleft$ $\overline{AB} = \{4, -5, 0\}$; $\overline{AC} = \{0, 4, -3\}$;
$2S_{ABC} = S_{ABCE} = |\overline{AC}||\overline{BD}|$;
$S_{ABCE} = |\overline{AB} \times \overline{AC}| =$
$$= \left\| \begin{array}{ccc} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{array} \right\| = |15\bar{\imath} + 12\bar{\jmath} + 16\bar{k}| =$$
$$= \sqrt{225 + 144 + 256} = \sqrt{625} = 25;$$
$$|\overline{BD}| = \frac{|\overline{AB} \times \overline{AC}|}{|\overline{AC}|} = \frac{25}{\sqrt{16+9}} = 5. \ \triangleright$$

2.109. Определить, при каких значениях α и β вектор $\alpha\bar{\imath} + 3\bar{\jmath} + \beta\bar{k}$ будет коллинеарен вектору $\bar{a} \times \bar{b}$, если $\bar{a}(3, -1, 1)$, $\bar{b}(1, 2, 0)$.

$\triangleleft$ В результате вычисления векторного произведения получим $\bar{a} \times \bar{b}(-2, 1, 7)$. Вектор $\alpha\bar{\imath} + 3\bar{\jmath} + \beta\bar{k}$ коллинеарен вектору $-2\bar{\imath} + \bar{\jmath} + 7\bar{k}$ при $\alpha = -6$, $\beta = 21$. $\triangleright$

2.114. Три ненулевых вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ связаны соотношениями $\bar{a} = \bar{b} \times \bar{c}$, $\bar{b} = \bar{c} \times \bar{a}$, $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$. Найти длины этих векторов и углы между ними.

$\triangleleft$ Из пункта 1 определения векторного произведения следует, что каждый из векторов ортогонален двум остальным. Из пункта 2 получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} |\bar{a}| = |\bar{b}||\bar{c}| \\ |\bar{b}| = |\bar{c}||\bar{a}| \\ |\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}| \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\bar{a}| = |\bar{a}||\bar{b}|^2 \\ |\bar{b}| = |\bar{a}|^2|\bar{b}| \end{array} \right. \Rightarrow \quad |\bar{a}| = 1, \ |\bar{b}| = 1, \ |\bar{c}| = 1.$$

Кроме того, тройка $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ правая. Таким образом, векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют правый ортонормированный базис. $\triangleright$

Физический смысл векторного произведения: момент силы $\overline{F}$, приложенной к точке A, относительно точки O, равен $\overline{OA} \times \overline{F}$.

2.115. Сила $\overline{F} = 2\bar{\imath} - 4\bar{\jmath} + 5\bar{k}$ приложена к точке $A(4, -2, 3)$. Определить момент этой силы относительно точки $O(3, 2, -1)$.

$$\triangleleft \ \overline{M} = \overline{OA} \times \overline{F} = (\bar{\imath} - 4\bar{\jmath} + 4\bar{k}) \times (2\bar{\imath} - 4\bar{\jmath} + 5\bar{k}) = \left| \begin{array}{ccc} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 1 & -4 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \end{array} \right| = -4\bar{\imath} + 3\bar{\jmath} + 4\bar{k}. \ \triangleright$$

2.118. Найти координаты вектора x, если известно, что он перпендикулярен векторам $\bar{a}_1 = \{4, -2, -3\}$ и $\bar{a}_2 = \{0, 1, 3\}$, образует с ортом $\bar{\jmath}$ тупой угол и $|\bar{x}| = 26$.

$\triangleleft$ Так как $\bar{x}$ перпендикулярен $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$, то он коллинеарен их векторному произведению

$$\bar{a}_1 \times \bar{a}_2 = \left| \begin{array}{ccc} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 4 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right| = -3\bar{\imath} - 12\bar{\jmath} + 4\bar{k}; \qquad |\bar{a}_1 \times \bar{a}_2| = \sqrt{9 + 144 + 16} = \sqrt{169} = 13.$$

Поскольку $\bar{x}$ образует с ортом $\bar{\jmath}$ тупой угол, его направляющие косинусы равны $-3/13$, $-12/13$ и $4/13$. Тогда его координаты получим умножением направляющих косинусов на длину: $\bar{x} = \{-6, -24, 8\}$. $\triangleright$

2.120. При каких условиях уравнение $\bar{a}_2 = \bar{a}_1 \times \bar{x}$ имеет решение относительно $\bar{x}$? Сколько существует решений?

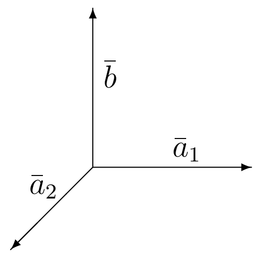
◁ Пусть $\bar a_1$ и $\bar a_2$ заданы координатами в ортонормированном базисе. Тогда

$$\bar a_2 = \begin{vmatrix} \bar\imath & \bar\jmath & \bar k \\ x_{a1} & y_{a1} & z_{a1} \\ x_x & y_x & z_x \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_{a1}z_x - z_{a1}y_x = x_{a2} \\ z_{a1}x_x - x_{a1}z_x = y_{a2} \\ x_{a1}y_x - y_{a1}x_x = z_{a2} \end{cases}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 0 & -z_{a1} & y_{a1} \\ z_{a1} & 0 & -x_{a1} \\ -y_{a1} & x_{a1} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, уравнение может либо не иметь решений, либо иметь их бесконечно много.

Если векторы $\bar a_1$ и $\bar a_2$ не ортогональны, то по пункту 1 определения векторного произведения $\bar a_2$ не может быть векторным произведением $\bar a_1$ на некоторый вектор. Покажем, что если $\bar a_1 \perp \bar a_2$, то имеется хотя бы одно решение уравнения. Рассмотрим вектор $\bar b = (\bar a_2 \times \bar a_1)/|\bar a_1|^2$. Имеем:

1) $\bar a_2 \perp \bar a_1$ и $\bar a_2 \perp \bar b$;
2) $|\bar a_2| = |\bar a_1||\bar b|\sin(\pi/2)$;
3) тройка $\bar a_1$, $\bar b$, $\bar a_2$ правая (см. рис.).
Следовательно $\bar a_2 = \bar a_1 \times \bar b$, то есть $\bar b$ является корнем уравнения $\bar a_2 = \bar a_1 \times \bar x$. Но тогда это уравнение имеет бесконечное множество решений. ▷



Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением трёх векторов $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$ называют число $\bar a\bar b\bar c = (\bar a \times \bar b)\cdot \bar c$.

Геометрические свойства смешанного произведения:

1° Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда $\bar a\bar b\bar c = 0$.

2° Смешанное произведение трёх векторов $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$ равно объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком +, если тройка $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$ правая, и –, если она левая.

Алгебраические свойства смешанного произведения:

1° $\bar a\bar b\bar c = \bar b\bar c\bar a = \bar c\bar a\bar b = -\bar a\bar c\bar b = -\bar c\bar b\bar a = -\bar b\bar a\bar c$ (свойство циклической перестановки);

2° $(\lambda\bar a)\bar b\bar c = \bar a(\lambda\bar b)\bar c = \bar a\bar b(\lambda\bar c) = \lambda(\bar a\bar b\bar c)$ (ассоциативность относительно умножения на число);

3° $\bar a\bar b(\bar c_1+\bar c_2) = \bar a\bar b\bar c_1+\bar a\bar b\bar c_2$ (дистрибутивность относительно сложения). В силу свойства 1 имеет место также для второго и третьего множителей.

Если три вектора $\bar a$, $\bar b$ и $\bar c$ заданы координатами в правом ортонормированном базисе, то их смешанное произведение может быть вычислено по формуле

$$\bar a\bar b\bar c = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}.$$

2.125. Векторы $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$ образуют левую тройку, $|\bar a| = 1$, $|\bar b| = 2$, $|\bar c| = 3$ и $(\widehat{\bar a, \bar b}) = 30°$; $\bar c \perp \bar a$, $\bar c \perp \bar b$. Найти $\bar a\bar b\bar c$.

◁ $|\bar a \times \bar b| = |\bar a||\bar b|\sin(\widehat{\bar a, \bar b}) = 1\cdot 2\cdot (1/2) = 1$;

$\bar a \times \bar b \parallel \bar c$, поскольку они ортогональны одной плоскости; их направления противоположны, так как тройка $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$ левая, а тройка $\bar a$, $\bar b$, $\bar a\times\bar b$ — правая; поэтому $(\widehat{\bar a \times \bar b, \bar c}) = 180°$ и получаем

$$\bar a\bar b\bar c = (\bar a \times \bar b)\cdot \bar c = |\bar a \times \bar b|\,|\bar c|\cos(\widehat{\bar a \times \bar b, \bar c}) = 1\cdot 3\cdot(-1) = -3. \quad ▷$$

2.127(а). Установить, образуют ли векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ и $\bar{a}_3$ базис в множестве всех векторов, если $\bar{a}_1 = \{2, 3, -1\}$, $\bar{a}_2 = \{1, -1, 3\}$, $\bar{a}_3 = \{1, 9, -11\}$?

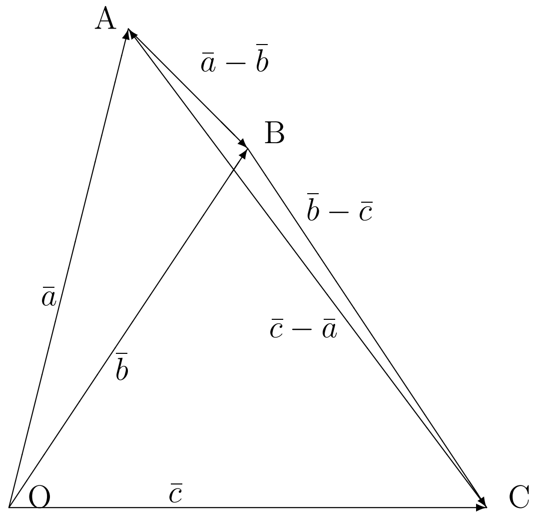
$\triangleleft$

$$\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

поэтому эти три вектора компланарны; следовательно, они линейно зависимы, значит, не образуют базис. $\triangleright$

2.129. Доказать, что при любых $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ векторы $\bar{a} - \bar{b}$, $\bar{b} - \bar{c}$ и $\bar{c} - \bar{a}$ компланарны. Каков геометрический смысл этого факта?

$\triangleleft$ $(\bar{a} - \bar{b})(\bar{b} - \bar{c})(\bar{c} - \bar{a}) = \bar{a}(\bar{b} - \bar{c})(\bar{c} - \bar{a}) - \bar{b}(\bar{b} - \bar{c})(\bar{c} - \bar{a}) = \bar{a}\bar{b}(\bar{c} - \bar{a}) - \bar{a}\bar{c}(\bar{c} - \bar{a}) - \bar{b}\bar{b}(\bar{c} - \bar{a}) + \bar{b}\bar{c}(\bar{c} - \bar{a}) = = \bar{a}\bar{b}\bar{c} - \bar{a}\bar{b}\bar{a} - \bar{a}\bar{c}\bar{c} + \bar{a}\bar{c}\bar{a} - \bar{b}\bar{b}\bar{c} + \bar{b}\bar{b}\bar{a} + \bar{b}\bar{c}\bar{c} - \bar{b}\bar{c}\bar{a} = 0.$



Как видно из рисунка, векторы $\bar{a} - \bar{b}$, $\bar{b} - \bar{c}$ и $\bar{c} - \bar{a}$ лежат в плоскости грани ABC тетраэдра $OABC$, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. $\triangleright$

2.130. Доказать тождество $(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})(\bar{a} - 2\bar{b} + 2\bar{c})(4\bar{a} + \bar{b} + 5\bar{c}) = 0$.

$\triangleleft$ $(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})(\bar{a} - 2\bar{b} + 2\bar{c})(4\bar{a} + \bar{b} + 5\bar{c}) =$

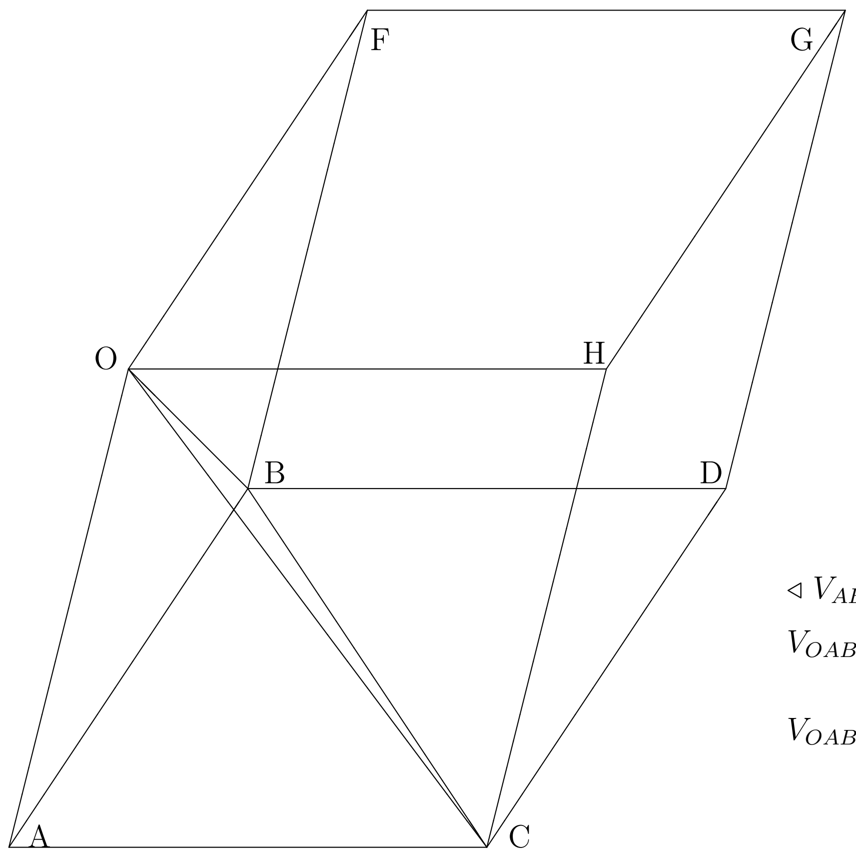
$= \bar{a}(\bar{a} - 2\bar{b} + 2\bar{c})(4\bar{a} + \bar{b} + 5\bar{c}) + \bar{b}(\bar{a} - 2\bar{b} + 2\bar{c})(4\bar{a} + \bar{b} + 5\bar{c}) + \bar{c}(\bar{a} - 2\bar{b} + 2\bar{c})(4\bar{a} + \bar{b} + 5\bar{c}) =$

$= \bar{a}\bar{a}(4\bar{a} + \bar{b} + 5\bar{c}) - 2\bar{a}\bar{b}(4\bar{a} + \bar{b} + 5\bar{c}) + 2\bar{a}\bar{c}(4\bar{a} + \bar{b} + 5\bar{c}) + \bar{b}\bar{a}(4\bar{a} + \bar{b} + 5\bar{c}) - 2\bar{b}\bar{b}(4\bar{a} + \bar{b} + 5\bar{c}) + 2\bar{b}\bar{c}(4\bar{a} + \bar{b} + 5\bar{c}) +$

$+ \bar{c}\bar{a}(4\bar{a} + \bar{b} + 5\bar{c}) - 2\bar{c}\bar{b}(4\bar{a} + \bar{b} + 5\bar{c}) + 2\bar{c}\bar{c}(4\bar{a} + \bar{b} + 5\bar{c}) = -10\bar{a}\bar{b}\bar{c} + 2\bar{a}\bar{c}\bar{b} + 5\bar{b}\bar{a}\bar{c} + 8\bar{b}\bar{c}\bar{a} + \bar{c}\bar{a}\bar{b} - 8\bar{c}\bar{b}\bar{a} =$

$= -\bar{a}\bar{b}\bar{c} - \bar{a}\bar{c}\bar{b} = 0.$ $\triangleright$

2.132. Вычислить объём тетраэдра $OABC$, если $\overline{OA} = 3\bar{\imath} + 4\bar{\jmath}$; $\overline{OB} = -3\bar{\jmath} + \bar{k}$; $\overline{OC} = 2\bar{\jmath} + 5\bar{k}$.



$\triangleleft\ V_{ABCDOFGH} = 2hS_{ABC} = |\overline{OA}\,\overline{OB}\,\overline{OC}|$;
$V_{OABC} = \dfrac{1}{3}hS_{ABC} = \dfrac{1}{6}|\overline{OA}\,\overline{OB}\,\overline{OC}|$;

$$V_{OABC} = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{matrix}\right\| = \frac{17}{2}. \triangleright$$

2.136(а). При каком λ векторы $\bar{a} = \{\lambda, 3, 1\}$, $\bar{b} = \{5, -1, 2\}$, $\bar{c} = \{-1, 5, 4\}$ будут компланарны?

$$\triangleleft\ \bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} \lambda & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -14\lambda - 42 = 0; \Rightarrow \lambda = -3. \triangleright$$

2.137. Доказать, что четыре точки $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$ и $D(2, 1, 3)$ лежат в одной плоскости.

$\triangleleft$ Эти четыре точки лежат в одной плоскости, если векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$ компланарны. $\overline{AB} = \{-1, -1, 6\}$, $\overline{AC} = \{-2, 0, 2\}$, $\overline{AD} = \{1, -1, 4\}$;

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0, \text{ то есть эти векторы компланарны. } \triangleright$$

2.138(а). Найти координаты четвёртой вершины тетраэдра $ABCD$, если известно, что она лежит на оси Oy, объём тетраэдра равен 29, $A(-1, 10, 0)$, $B(0, 5, 2)$, $C(6, 32, 2)$.

$\triangleleft\ D(0, y_D, 0)$, $\overline{AB} = \{1, -5, 2\}$, $\overline{AC} = \{7, 22, 2\}$, $\overline{AD}(1, y_D - 10, 0)$;

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 22 & 2 \\ 1 & y_D - 10 & 0 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} -5 & 2 \\ 22 & 2 \end{matrix}\right| - (y_D - 10)\left|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 7 & 2 \end{matrix}\right\|$$

$$\frac{1}{6}\,|-54 + 12(y_D - 10)| = 29 \Rightarrow \quad y_D = 0 \text{ или } \quad y_D = 29; \quad D(0, 0, 0) \text{ или } D(0, 29, 0). \triangleright$$

2.140. Доказать тождества:

а) $(\bar a+\bar c)\bar b(\bar a+\bar b)=-\bar a\bar b\bar c$;

в) $(\bar a+\bar b)(\bar b+\bar c)(\bar c+\bar a)=2\bar a\bar b\bar c$.

◃ а) $(\bar a+\bar c)\bar b(\bar a+\bar b)=\bar a\bar b(\bar a+\bar b)+\bar c\bar b(\bar a+\bar b)=\bar a\bar b\bar a+\bar a\bar b\bar b+\bar c\bar b\bar a+\bar c\bar b\bar b=\bar c\bar b\bar a=-\bar a\bar b\bar c$. ▹

◃ в) $(\bar a+\bar b)(\bar b+\bar c)(\bar c+\bar a)=\bar a(\bar b+\bar c)(\bar c+\bar a)+\bar b(\bar b+\bar c)(\bar c+\bar a)=\bar a\bar b(\bar c+\bar a)+\bar a\bar c(\bar c+\bar a)+\bar b\bar b(\bar c+\bar a)+\bar b\bar c(\bar c+\bar a)==\bar a\bar b\bar c+\bar a\bar b\bar a+\bar a\bar c\bar c+\bar a\bar c\bar a+\bar b\bar b\bar c+\bar b\bar b\bar a+\bar b\bar c\bar c+\bar b\bar c\bar a=2\bar a\bar b\bar c$. ▹

1.

① Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar a, \bar b, \bar c$, равен 14. Площадь паралелограмма, построенного на векторах $\bar a, \bar b$, равна 7. Найти высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\bar a+2\bar b$, $3\bar a+\bar b$, $\bar a+\bar b-4\bar c$, опущенную из конца третьего вектора на грань, построенную на первых двух.

Решение: $\bar a\bar b\bar c=14$, $|\bar a\times\bar b|=7$

$|(\bar a+2\bar b)\times(3\bar a+\bar b)|=5|\bar a\times\bar b|=35.$

$(\bar a+2\bar b)(3\bar a+\bar b)(\bar a+\bar b-4\bar c)=20\bar a\bar b\bar c=280\Rightarrow h=\frac{280}{35}=8.$

2.

② Вершинами тетраэдра служат точки $A(1;1;1)$, $B(3;4;1)$, $C(1;-2;2)$ и $D(2;-1;8)$. Найти объем и высоту тетраэдра, опущенного из вершины D на грань ABC.

Решение: $\overline{AB}\{2;3;0\}$; $\overline{AC}\{0;-3;1\}$; $\overline{AD}\{1;-2;7\}$.

Площадь основания:

$S=|\overline{AB}\times\overline{AD}|=|3\bar i-2\bar j+6\bar k|=7$

Объем параллелепипеда:

$$V=|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}|=\left\|\begin{matrix}2&3&0\\0&-3&1\\1&-2&7\end{matrix}\right\|=|-35|=35.$$

Высота $h=V/S=35/7=5.$

ДЗ 2.98 (в), 100 (в, г), 105, 106 (б), 107, 111, 119; 2.124, 126, 127 (б), 133, 135 (б), 136 (б), 138 (б), 139, 140 (б, г).