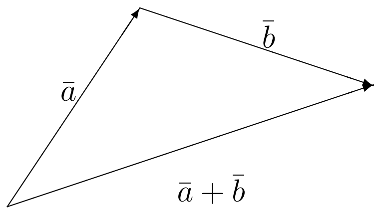
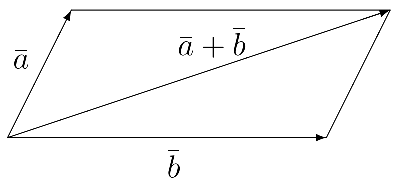
Семинары 3-4. Линейные операции с векторами. Разложение по базису

Вектор — направленный отрезок. Вектор может быть задан указанием точек начала и конца: $\overline{AB}$ — вектор с началом в точке A и концом в точке B. Вектор имеет направление и длину. Говорят, что два вектора равны, если их направления и длины равны. Нулевой вектор $\bar{0}$- вектор нулевой длины.

Результатом *умножения вектора $\bar{a}$ на число λ* является вектор $\lambda\bar{a}$, длина которого в λ раз больше длины вектора $\bar{a}$, а напрвление совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно направлению $\bar{a}$, если $\lambda < 0$. По определению $-\bar{a} = (-1)\bar{a}$.

Результатом *сложения двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$* является третий вектор, определяемый по правилу треугольника или параллелограмма (см. рис.).



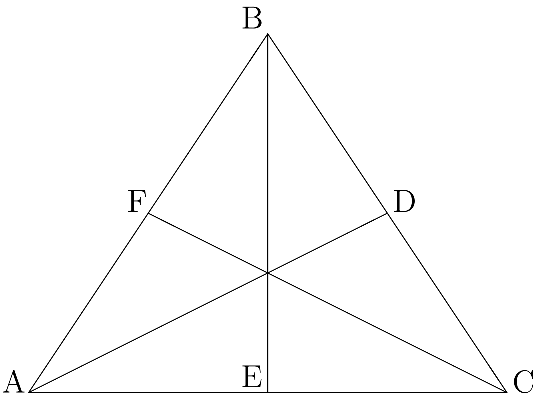


Разность векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ по определению $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$.

Свойства линейных операций над векторами:

1° $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ (коммутативность сложения);
2° $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ (ассоциативность сложения);
3° $\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$ (дистрибутивность);
4° $\lambda(\mu\bar{a}) = (\lambda\mu)\bar{a}$ (ассоциативность умножения на число);
5° $\bar{a} - \bar{a} = \bar{0}$;
6° $0\bar{a} = \bar{0}$;
7° $\lambda\bar{0} = \bar{0}$.

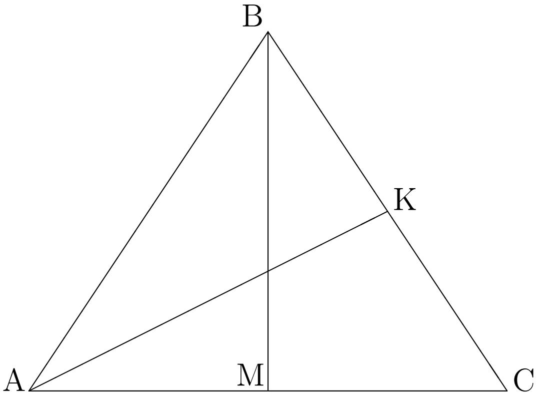
2.7.



$\overline{AD}$, $\overline{BE}$ и $\overline{CF}$ – медианы треугольника ABC. Доказать равенство $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \bar{0}$.

$\triangleleft$ $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC} + \overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{CA} + \overline{CA} + \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{3}{2}\overline{AB} + \frac{3}{2}\overline{BC} + \frac{3}{2}\overline{CA} =$
$= \frac{3}{2}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}) = \bar{0}.$ $\triangleright$

2.8.

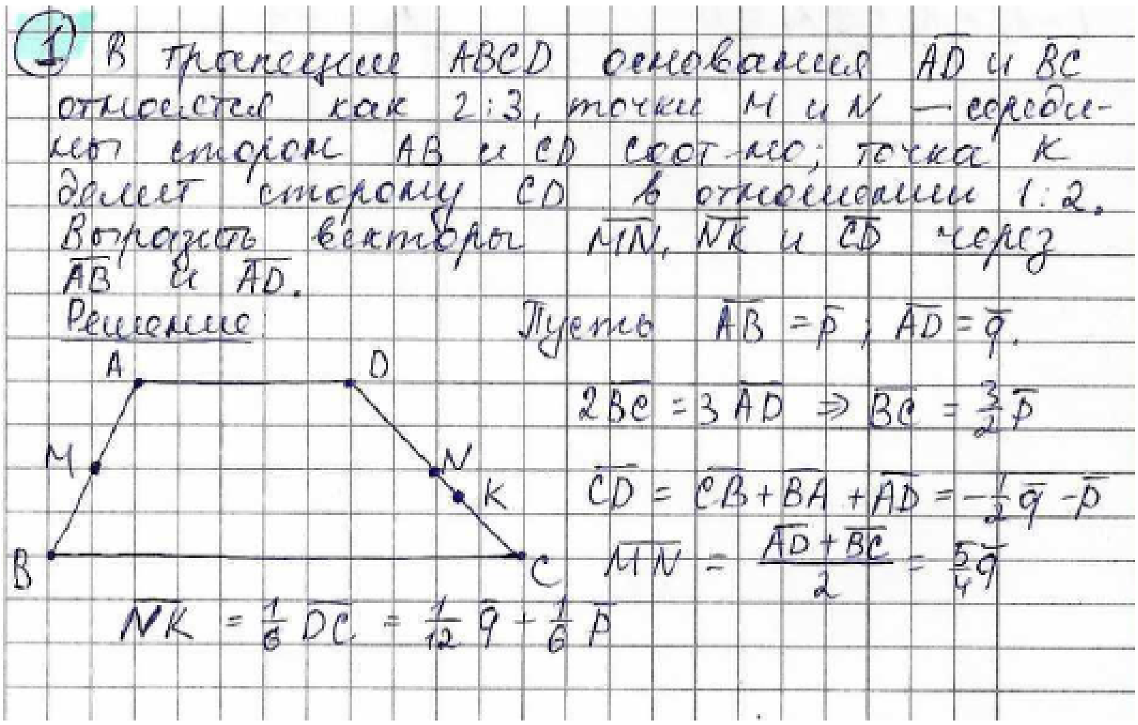


$\overline{AK}$ и $\overline{BM}$ – медианы треугольника ABC. Выразить через $\overline{p} = \overline{AK}$ и $\overline{q} = \overline{BM}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CA}$.

$\triangleleft$

$$\begin{cases} \overline{p} & = & \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC} \\ \overline{q} & = & \overline{BA} + \frac{1}{2}\overline{AC} \\ \overline{AC} & = & \overline{AB} + \overline{BC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{p} & = & \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC} \\ \overline{q} & = & \overline{BA} + \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC}) = \frac{1}{2}(-\overline{AB} + \overline{BC}) \end{cases};$$

умножив второе уравнение на 2 и прибавив к первому, получим $\overline{p} + 2\overline{q} = \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC} - \overline{AB} + \overline{BC}$, то есть $\frac{3}{2}\overline{BC} = \overline{p} + 2\overline{q}$ или $\overline{BC} = \frac{2}{3}\overline{p} + \frac{4}{3}\overline{q}$. Тогда из первого уравнения исходной системы $\overline{AB} = \overline{p} - \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{2}{3}\overline{p} - \frac{2}{3}\overline{q}$ и из третьего уравнения $\overline{CA} = -\overline{AB} - \overline{BC} = -\frac{4}{3}\overline{p} - \frac{2}{3}\overline{q}$. $\triangleright$


1. В трапеции ABCD основания $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$ относятся как 2:3, точки M и N — середины сторон AB и CD соот-но; точка K делит сторону CD в отношении 1:2. Выразить векторы $\overline{MN}$, $\overline{NK}$ и $\overline{CD}$ через $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$.

Решение:

Пусть $\overline{AB} = \overline{p}$; $\overline{AD} = \overline{q}$.

$2\overline{BC} = 3\overline{AD} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{3}{2}\overline{p}$

$\overline{CD} = \overline{CB} + \overline{BA} + \overline{AD} = -\frac{1}{2}\overline{q} - \overline{p}$

$\overline{MN} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} = \frac{5}{4}\overline{q}$

$\overline{NK} = \frac{1}{6}\overline{DC} = \frac{1}{12}\overline{q} + \frac{1}{6}\overline{p}$

Выражение $\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \dots + \lambda_n\bar{a}_n$ называется *линейной комбинацией* системы векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$, а числа λ_1, λ_2,...λ_n — коэффициентами линейной комбинации.

Система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ называется *линейно зависимой*, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ такие, что хотя бы одно из них отлично от нуля и $\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \dots + \lambda_n\bar{a}_n = \bar{0}$. Если такого набора чисел не существует, система называется *линейно независимой*.

Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов можно представить как линейную комбинацию остальных: $\bar{a}_n = \mu_1\bar{a}_1 + \dots + \mu_{n-1}\bar{a}_{n-1}$.

Система из двух векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда векторы *коллинеарны*, то есть лежат на параллельных прямых. Система из трёх векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда векторы *компланарны*, то есть лежат в одной плоскости. Система из четырёх векторов в пространстве или из трёх векторов на плоскости всегда линейно зависима.

2.19. Разложить вектор $\bar{s} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$ по трём некомпланарным векторам: $\bar{p} = \bar{a} + \bar{b} - 2\bar{c}$, $\bar{q} = \bar{a} - \bar{b}$ и $\bar{r} = 2\bar{b} + 3\bar{c}$.

$\triangleleft$ Пусть $\bar{s} = \lambda\bar{p} + \mu\bar{q} + \nu\bar{r}$, где λ, μ, ν — неизвестные коэффициенты разложения. Тогда $\bar{s} = \lambda(\bar{a}+\bar{b}-2\bar{c}) + \mu(\bar{a}-\bar{b}) + \nu(2\bar{b}+3\bar{c}) = (\lambda+\mu)\bar{a} + (\lambda-\mu+2\nu)\bar{b} + (-2\lambda+3\nu)\bar{c}$; но $\bar{s} = \bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$, поэтому λ, μ и ν должны удовлетворять равенствам системы

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} \lambda & +\mu & & = & 1 \\ \lambda & -\mu & +2\nu & = & 1 \\ -2\lambda & & +3\nu & = & 1 \end{array}\right.$$

Решая систему, получим $\lambda = 2/5$, $\mu = 3/5$, $\nu = 3/5$ и $\bar{s} = \dfrac{2}{5}\bar{p} + \dfrac{3}{5}\bar{q} + \dfrac{3}{5}\bar{r}$. $\triangleright$

2.20. Найти линейную зависимость между данными четырьмя некомпланарными векторами: $\bar{p} = \bar{a} + \bar{b}$, $\bar{q} = \bar{b} - \bar{c}$, $\bar{r} = \bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$, $\bar{s} = \bar{b} + \dfrac{1}{2}\bar{c}$.

$\triangleleft$ Пусть $\lambda_1\bar{p} + \lambda_2\bar{q} + \lambda_3\bar{r} + \lambda_4\bar{s} = \bar{0}$; тогда

$\lambda_1(\bar{a} + \bar{b}) + \lambda_2(\bar{b} - \bar{c}) + \lambda_3(\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}) + \lambda_4(\bar{b} + \dfrac{1}{2}\bar{c}) = \bar{0}$,

$(\lambda_1 + \lambda_3)\bar{a} + (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4)\bar{b} + (-\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4/2)\bar{c} = \bar{0}$.

Требуется найти такие ненулевые λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, что

$$\left\{\begin{array}{lrrrcl} \lambda_1 & & +\lambda_3 & & = & 0 \\ \lambda_1 & +\lambda_2 & -\lambda_3 & +\lambda_4 & = & 0 \\ & -\lambda_2 & +\lambda_3 & +\dfrac{1}{2}\lambda_4 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Пусть $\lambda_1 = 1$, тогда $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = -\dfrac{2}{3}$, $\lambda_2 = -\dfrac{4}{3}$. Итак, $\bar{p} - \dfrac{4}{3}\bar{q} - \bar{r} - \dfrac{2}{3}\bar{s} = \bar{0}$. $\triangleright$

Базисом в векторном пространстве называется упорядоченная линейно независимая система векторов, такая, что любой вектор пространства можно представить как линейную комбинацию элементов базиса. Коэффициенты линейной комбинации при этом называются *координатами* вектора в базисе.

Любые два линейно независимых вектора на плоскости и любые три линейно независимых вектора в пространстве являются базисом.

Базис называется *ортогональным*, если его элементы попарно перпендикулярны, и *ортонормированным*, если кроме этого они имеют единичную длину.

Запись $\bar{a} = \{X, Y, Z\}$ или $\bar{a} = \{X, Y\}$ означает, что вектор $\bar{a}$ имеет в некотором ортонормированном базисе координаты X, Y, Z или X, Y, то есть $\bar{a} = X\bar{\imath} + Y\bar{\jmath} + Z\bar{k}$ (или $\bar{a} = X\bar{\imath} + Y\bar{\jmath}$ на плоскости).

2.38. Показать, что тройка векторов $\bar{e}_1 = \{1, 0, 0\}$, $\bar{e}_2 = \{1, 1, 0\}$ и $\bar{e}_3 = \{1, 1, 1\}$ образует базис в множестве всех векторов пространства. Вычислить координаты вектора $\bar{a} = -2\bar{\imath} - \bar{k}$ в базисе $\mathfrak{B} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ и написать соответствующее разложение по базису.

$\triangleleft$ Покажем, что векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$ линейно независимы. Допустим обратное: $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, хотя бы одно из которых отлично от нуля, такие, что

$$\lambda_1\bar{e}_1 + \lambda_2\bar{e}_2 + \lambda_3\bar{e}_3 = \lambda_1\bar{\imath} + \lambda_2(\bar{\imath} + \bar{\jmath}) + \lambda_3(\bar{\imath} + \bar{\jmath} + \bar{k}) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\bar{\imath} + (\lambda_2 + \lambda_3)\bar{\jmath} + \lambda_3\bar{k} = 0.$$

Система $(\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k})$ линейно независима, поэтому для выполнения равенства λ_1, λ_2, λ_3 должны быть решениями системы уравнений

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} \lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & = & 0 \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. ; \text{ но её определитель } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

следовательно, она имеет единственное решение, и это решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Получено противоречие, значит, система $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ линейно независима, значит, она является базисом.

Найдём теперь координаты $\bar{a}$ в базисе $\mathfrak{B}$. Из полученного выше равенства следует, что координаты λ_1, λ_2, λ_3 некоторого вектора в базисе $\mathfrak{B}$ и координаты x, y, z того же вектора в базисе $(\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k})$ связаны соотношениями

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} \lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & = & x \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 & = & y \\ & & \lambda_3 & = & z \end{array}\right. .$$

Для $\bar{a}$ даны $x = -2$, $y = 0$, $z = -1$; решая систему, получим $\lambda_3 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = -2$.

Итак, $\bar{a} = -2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3$. $\triangleright$

При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число; координаты суммы векторов равны суммам соответствующих координат.

Для вектора $\bar{a}$, имеющего в ортонормированном базисе координаты $\{X, Y, Z\}$, его длина $|\bar{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$. *Ортом* вектора $\bar{a}$ называется вектор единичной длины $\bar{a}_0$, имеющий то же направление: $\bar{a}_0 = (1/|\bar{a}|) \cdot \bar{a}$.

Проекцией вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется число $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}| \cos\varphi$, где $\varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$ — угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Если координаты вектора даны в ортонормированном базисе, то они совпадают с проекциями на координатные векторы.

Координаты $\{x_a/|\bar{a}|, y_a/|\bar{a}|, z_a/|\bar{a}|\}$ орта $\bar{a}_0$ вектора $\bar{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$ в ортонормированном базисе совпадают по величине с косинусами углов между $\bar{a}$ и базисными векторами; эти величины называются *направляющими косинусами* вектора $\bar{a}$. Сумма квадратов направляющих косинусов вектора равна единице:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x_a^2}{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} + \frac{y_a^2}{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} + \frac{z_a^2}{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} = 1.$$

2. Показать, что любые два вектора из трех

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -2 & 7 \end{pmatrix}$$

образуют базис на плоскости и разложить каждый из векторов по остальным двум.

(2) $a_1 = (1, 2)$

$a_2 = (-4, 3)$

$a_3 = (-2, 7)$

$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 11 \Rightarrow a_1, a_2$ – базис.

$\Delta_{23} = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -28 + 6 = -22 \neq 0$ – базис a_2, a_3.

$\Delta_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 7 = -11 \neq 0$ – базис. a_3, a_1

$\overline{a_3} = \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2}$

$\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_2$

$\begin{cases} \lambda_1 - 4\lambda_2 = -2 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 7 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 11$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 22$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 11$

$\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = 1$

$\begin{cases} \overline{a_3} = 2\overline{a_1} + \overline{a_2} \\ \overline{a_2} = \overline{a_3} - 2\overline{a_1} \\ a_1 = \dfrac{\overline{a_3} - \overline{a_2}}{2} \end{cases}$

3. Разложить вектор $\bar{d} = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ по векторам

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

③ Разложить вектор $\bar{d} = (10, 8, 2)$ по векторам $\bar{a} = (1; 2; 1)$; $\bar{b} = (-2; 0; 1)$; $\bar{c} = (3, 2, 1)$.

Решение: Такое разложение ∃-ет, т.к

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Пусть $\bar{d} = \alpha \bar{a} + \beta \bar{b} + \gamma \bar{c}$. Тогда

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta + 3\gamma = 10 \\ 2\alpha + 2\gamma = 8 \\ \alpha + \beta + \gamma = 2 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 3;\ \beta = -2;\ \gamma = 1$$

$\bar{d} = 3\bar{a} - 2\bar{b} + \bar{c}$.

2.39. Заданы векторы $\bar{a} = 2\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$, $\bar{b} = -3\bar{\jmath} - 2\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{\imath} + \bar{\jmath} - \bar{k}$. Найти:
а) координаты орта $\bar{a}_0$;
б) координаты вектора $\bar{a} - (1/2)\bar{b} + \bar{c}$;
в) разложение вектора $\bar{a} + \bar{b} - 2\bar{c}$ по базису $\mathfrak{B} = (\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k})$;
г) $\text{пр}_{\bar{\jmath}}(\bar{a} - \bar{b})$.
◁ а) $|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{13}$; $\qquad \bar{a}_0 = \{2/\sqrt{13}, 3/\sqrt{13}, 0\}$. ▷
◁ б) $\bar{a} - (1/2)\bar{b} + \bar{c} = (2\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}) - (1/2)(-3\bar{\jmath} - 2\bar{k}) + (\bar{\imath} + \bar{\jmath} - \bar{k}) = 3\bar{\imath} + (11/2)\bar{\jmath}$; $\{3, 11/2, 0\}$. ▷
◁ в) $\bar{a} + \bar{b} - 2\bar{c} = (2\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}) + (-3\bar{\jmath} - 2\bar{k}) - 2(\bar{\imath} + \bar{\jmath} - \bar{k}) = -2\bar{\jmath}$. ▷
◁ г) $\bar{a} - \bar{b} = 2\bar{\imath} + 6\bar{\jmath} + 2\bar{k}$; $\text{пр}_{\bar{\jmath}}(\bar{a} - \bar{b}) = 6$. ▷

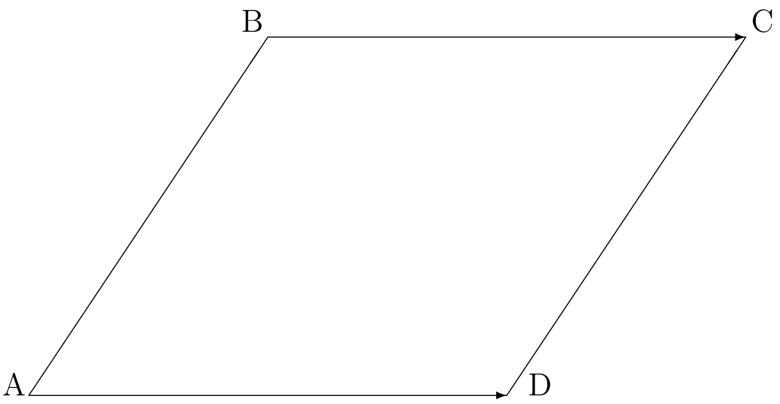
2.40. Найти координаты орта $\bar{a}_0$, если $\bar{a} = \{6, 7, -6\}$.
$|\bar{a}| = \sqrt{6^2 + 7^2 + (-6)^2} = \sqrt{36 + 49 + 36} = \sqrt{121} = 11$; $\qquad \bar{a}_0 = \{6/11, 7/11, -6/11\}$. ▷

2.44. Найти вектор $\bar{x}$, образующий со всеми тремя базисными ортами равные острые углы, если $|\bar{x}| = 2\sqrt{3}$.

◁ Так как вектор образует со всеми тремя базисными ортами равные острые углы, его направляющие косинусы равны. Так как координаты $\bar{x}$ есть произведения направляющих косинусов на $|\bar{x}|$, то $\bar{x} = 2\sqrt{3}(\cos\alpha\bar{\imath} + \cos\alpha\bar{\jmath} + \cos\alpha\bar{k})$. Но $\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, угол острый, поэтому $\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$ и получаем $\bar{x} = 2\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} + 2\bar{k})$. ▷

Говорят, что в пространстве или на плоскости задана *система координат*, если зафиксирована некоторая точка O, называемая началом координат, и некоторый базис. Вектор с началом в начале координат и концом в точке A называется *радиус–вектором* точки A, а его координаты в базисе выбранной системы координат — координатами точки A.

2.51. Даны три вершины $A(3, -4, 7)$, $B(-5, 3, -2)$, $C(1, 2, -3)$ параллелограмма $ABCD$. Найти его четвёртую вершину D, противоположную B.



◁ $\overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB}$

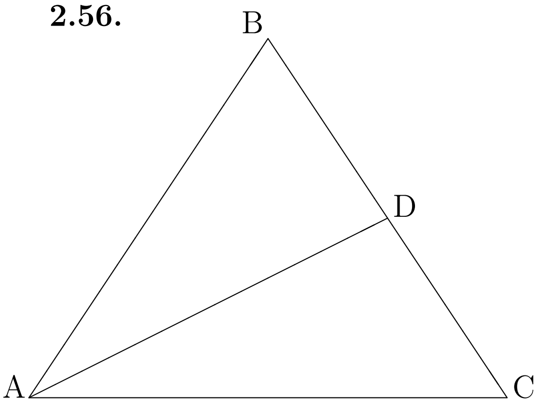
$\overline{BC} = \{6, -1, -1\}$

$\overline{BC} = \overline{AD}$

$\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AD} = \overline{OA} + \overline{BC}$

$\overline{OD} = \{9, -5, 6\}$ ▷

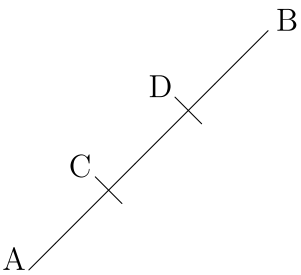
2.56.



Даны вершины треугольника
$A(3,-1,5)$, $B(4,2,-5)$ и $C(-4,0,3)$.
Найти длину медианы, проведённой из вершины A.

$\triangleleft\ \overline{AB} = \{1,3,-10\} \qquad \overline{BC} = \{-8,-2,8\}$
$\overline{AD} = \overline{AB} + \dfrac{1}{2}\overline{BC}$;
$\overline{AD}(-3,2,-6)$;
$|\overline{AD}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-6)^2} = 7.\ \triangleright$

2.57. Отрезок с концами в точках $A(3,-2)$ и $B(6,4)$ разделён на три равные части. Найти координаты точек деления.



$\triangleleft\ \overline{AB} = \{3,6\}$;

$\overline{AC} = \dfrac{1}{3}\overline{AB}, \quad \overline{AC} = \{1,2\}; \qquad \overline{AD} = \dfrac{2}{3}\overline{AB}, \quad \overline{AD} = \{2,4\}$;

$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC}, \quad \overline{OC} = \{4,0\}; \quad \overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AD}, \quad \overline{OD} = \{5,2\}$;

$C(4,0) \quad D(5,2).\ \triangleright$

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\,\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$.
Свойства скалярного произедения:
$1^\circ \quad \bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$ (коммутативность);
$2^\circ \quad (\lambda\bar{a})\bar{b} = \lambda(\bar{a}\bar{b})$ (ассоциативность относительно умножения на число);
$3^\circ \quad \bar{a}(\bar{b}_1 + \bar{b}_2) = \bar{a}\bar{b}_1 + \bar{a}\bar{b}_2$ (дистрибутивность относительно сложения).
Два вектора называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю. Скалярное произведение нулевого вектора на любой вектор равно нулю.

2.65. $|\bar{a}_1| = 3$, $|\bar{a}_2| = 4$, $(\widehat{\bar{a}_1,\bar{a}_2}) = 2\pi/3$. Вычислить:
а) $\bar{a}_1^2 = \bar{a}_1\bar{a}_1$; б) $(3\bar{a}_1 - 2\bar{a}_2)(\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2)$; в) $(\bar{a}_1 + \bar{a}_2)^2$.
$\triangleleft$ а) $\bar{a}_1^2 = |\bar{a}_1|^2\cos(\widehat{\bar{a}_1,\bar{a}_1}) = 3^2 \cdot 1 = 9;\ \triangleright$
$\triangleleft$ б) $(3\bar{a}_1 - 2\bar{a}_2)(\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2) = 3\bar{a}_1^2 + 6\bar{a}_1\bar{a}_2 - 2\bar{a}_1\bar{a}_2 - 4\bar{a}_2^2 = 3|\bar{a}_1|^2 + 4|\bar{a}_1||\bar{a}_2|\cos(\widehat{\bar{a}_1,\bar{a}_2}) - 4|\bar{a}_2|^2 =$
$= 3\cdot 3^2 + 4\cdot 3\cdot 4\cdot(-1/2) - 4\cdot 4^2 = -61;\ \triangleright$
$\triangleleft$ в) $(\bar{a}_1 + \bar{a}_2)^2 = (\bar{a}_1 + \bar{a}_2)(\bar{a}_1 + \bar{a}_2) = \bar{a}_1^2 + 2\bar{a}_1\bar{a}_2 + \bar{a}_2^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot(-1/2) + 4^2 = 13.\ \triangleright$

Связь скалярного произведения с проекцией вектора на вектор. Из определения очевидно $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\,\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}|\,\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}$.

2.70. Вычислить $\text{пр}_{\bar{a}+\bar{b}}(2\bar{a} - \bar{b})$, если $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 1$ и $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = 120^\circ$.
$\triangleleft\ (\bar{a} + \bar{b})(2\bar{a} - \bar{b}) = |\bar{a} + \bar{b}|\,\text{пр}_{\bar{a}+\bar{b}}(2\bar{a} - \bar{b})$;
$|\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{(\bar{a} + \bar{b})^2} = \sqrt{\bar{a}^2 + 2\bar{a}\bar{b} + \bar{b}^2} = \sqrt{1^2 + 2\cdot(-1/2) + 1^2} = 1$;

$$\text{пр}_{\bar a+\bar b}(2\bar a-\bar b)=\frac{(\bar a+\bar b)(2\bar a-\bar b)}{|\bar a+\bar b|}=(2\bar a^2+\bar a\bar b-\bar b^2)=2-1/2-1=1/2.\ \triangleright$$

4. Найти угол между векторами $\bar a-2\bar b$, $\bar a+\bar b$ если $|\bar a|=1$, $|\bar b|=2$, угол между векторами $\bar a$ и $\bar b$ равен $\frac{\pi}{3}$.

$(\widehat{\bar a-2\bar b;\ \bar a+\bar b})$

$=\dfrac{(\bar a-2\bar b)(\bar a+\bar b)}{|\bar a-2\bar b|\cdot|\bar a+\bar b|}=$

$=\dfrac{\bar a^2-2\bar b^2-\bar a\bar b}{\sqrt{(\bar a-2\bar b)^2}\cdot\sqrt{(\bar a+\bar b)^2}}=$

$=\dfrac{1-2\cdot4-\cancel{2\cdot1\cdot\frac{1}{2}}\to 1}{\sqrt{\bar a^2+4\bar b^2-4\bar a\bar b}\cdot\sqrt{\bar a^2+\bar b^2+2\bar a\bar b}}=$

$=\dfrac{-8}{\sqrt{\underbrace{1+16-4}_{13}}\cdot\sqrt{\underbrace{1+4+2}_{7}}}=-\dfrac{8}{\sqrt{13\cdot7}}=-\dfrac{8}{\sqrt{91}}$

$(\widehat{\bar a-2\bar b;\ \bar a+\bar b})=\pi-\arccos\left(\dfrac{8}{\sqrt{91}}\right)$

либо $\arccos\left(-\dfrac{8}{\sqrt{91}}\right)$

2.77. Зная, что $|\bar a|=3$, $|\bar b|=1$, $|\bar c|=4$ и $\bar a+\bar b+\bar c=\bar 0$, вычислить $\bar a\bar b+\bar b\bar c+\bar c\bar a$.
$\triangleleft\ \bar a(\bar a+\bar b+\bar c)=\bar b(\bar a+\bar b+\bar c)=\bar c(\bar a+\bar b+\bar c)=0;$
$\bar a(\bar a+\bar b+\bar c)+\bar b(\bar a+\bar b+\bar c)+\bar c(\bar a+\bar b+\bar c)=0;$
$\bar a^2+\bar a\bar b+\bar a\bar c+\bar b\bar a+\bar b^2+\bar b\bar c+\bar c\bar a+\bar c\bar b+\bar c^2=0;$
$2(\bar a\bar b+\bar b\bar c+\bar c\bar a)=-(\bar a^2+\bar b^2+\bar c^2)=-(3^2+1^2+4^2)=-26;$
$\bar a\bar b+\bar b\bar c+\bar c\bar a=-13.\ \triangleright$

Пусть два вектора $\bar a=\{x_a,y_a,z_a\}$ и $\bar b=\{x_b,y_b,z_b\}$ заданы координатами в ортонормированном базисе. Тогда их скалярное произведение равно сумме попарных произведений координат: $\bar a\bar b=x_ax_b+y_ay_b+z_az_b$.

2.78. Даны векторы $\bar a_1=\{4,-2,-4\}$ и $\bar a_2=\{6,-3,2\}$. Вычислить:
б) $(2\bar a_1-3\bar a_2)(\bar a_1+2\bar a_2)$;

г) $|2\bar{a}_1 - \bar{a}_2|$;

ж) направляющие косинусы вектора $\bar{a}_1$;

з) $\text{пр}_{\bar{a}_1+\bar{a}_2}(\bar{a}_1 - 2\bar{a}_2)$;

и) $\cos(\widehat{\bar{a}_1, \bar{a}_2})$.

$\triangleleft$ б) $(2\bar{a}_1 - 3\bar{a}_2)(\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2) = 2\bar{a}_1^2 + 4\bar{a}_1\bar{a}_2 - 3\bar{a}_1\bar{a}_2 - 6\bar{a}_2^2$;

$\bar{a}_1^2 = 4^2 + (-2)^2 + (-4)^2 = 36$;

$\bar{a}_1\bar{a}_2 = 4 \cdot 6 + (-2) \cdot (-3) + (-4) \cdot 2 = 22$;

$\bar{a}_2^2 = 6^2 + (-3)^2 + 2^2 = 49$;

$(2\bar{a}_1 - 3\bar{a}_2)(\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2) = 2 \cdot 36 + 22 - 6 \cdot 49 = -200$. $\triangleright$

$\triangleleft$ г) $|2\bar{a}_1 - \bar{a}_2| = \sqrt{(2\bar{a}_1 - \bar{a}_2)^2} = \sqrt{4\bar{a}_1^2 - 4\bar{a}_1\bar{a}_2 + \bar{a}_2^2} = \sqrt{4 \cdot 36 - 4 \cdot 22 + 49} = \sqrt{105}$. $\triangleright$

$\triangleleft$ ж) $\cos(\widehat{\bar{a}_1, \bar{\imath}}) = (\bar{a}_1\bar{\imath})/|\bar{a}_1| = (4 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + (-4) \cdot 0)/6 = 2/3$;

$\cos(\widehat{\bar{a}_1, \bar{\jmath}}) = (\bar{a}_1\bar{\jmath})/|\bar{a}_1| = (4 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + (-4) \cdot 0)/6 = -1/3$;

$\cos(\widehat{\bar{a}_1, \bar{k}}) = (\bar{a}_1\bar{k})/|\bar{a}_1| = (4 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + (-4) \cdot 1)/6 = -2/3$. $\triangleright$

$\triangleleft$ з) $\text{пр}_{\bar{a}_1+\bar{a}_2}(\bar{a}_1 - 2\bar{a}_2) = ((\bar{a}_1 + \bar{a}_2)(\bar{a}_1 - 2\bar{a}_2))\,/|\bar{a}_1 + \bar{a}_2| = \dfrac{\bar{a}_1^2 - 2\bar{a}_1\bar{a}_2 + \bar{a}_1\bar{a}_2 - 2\bar{a}_2^2}{\sqrt{(\bar{a}_1^2 + 2\bar{a}_1\bar{a}_2 + \bar{a}_2^2}} =$

$= \dfrac{36 - 22 - 2 \cdot 49}{\sqrt{36 + 2 \cdot 22 + 49}} = -\dfrac{84}{\sqrt{129}}$. $\triangleright$

$\triangleleft$ и) $\cos(\widehat{\bar{a}_1, \bar{a}_2}) = \dfrac{\bar{a}_1\bar{a}_2}{|\bar{a}_1||\bar{a}_2|} = \dfrac{22}{6 \cdot 7} = \dfrac{11}{21}$. $\triangleright$

2.80. Найти длины сторон и величины углов треугольника с вершинами $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$ и $C(3, -2, 1)$.

$\triangleleft$ $\overline{AB} = \{-3, 0, -4\}$; $\quad \overline{BC} = \{7, 0, 1\}$; $\quad \overline{AC} = \{4, 0, -3\}$;

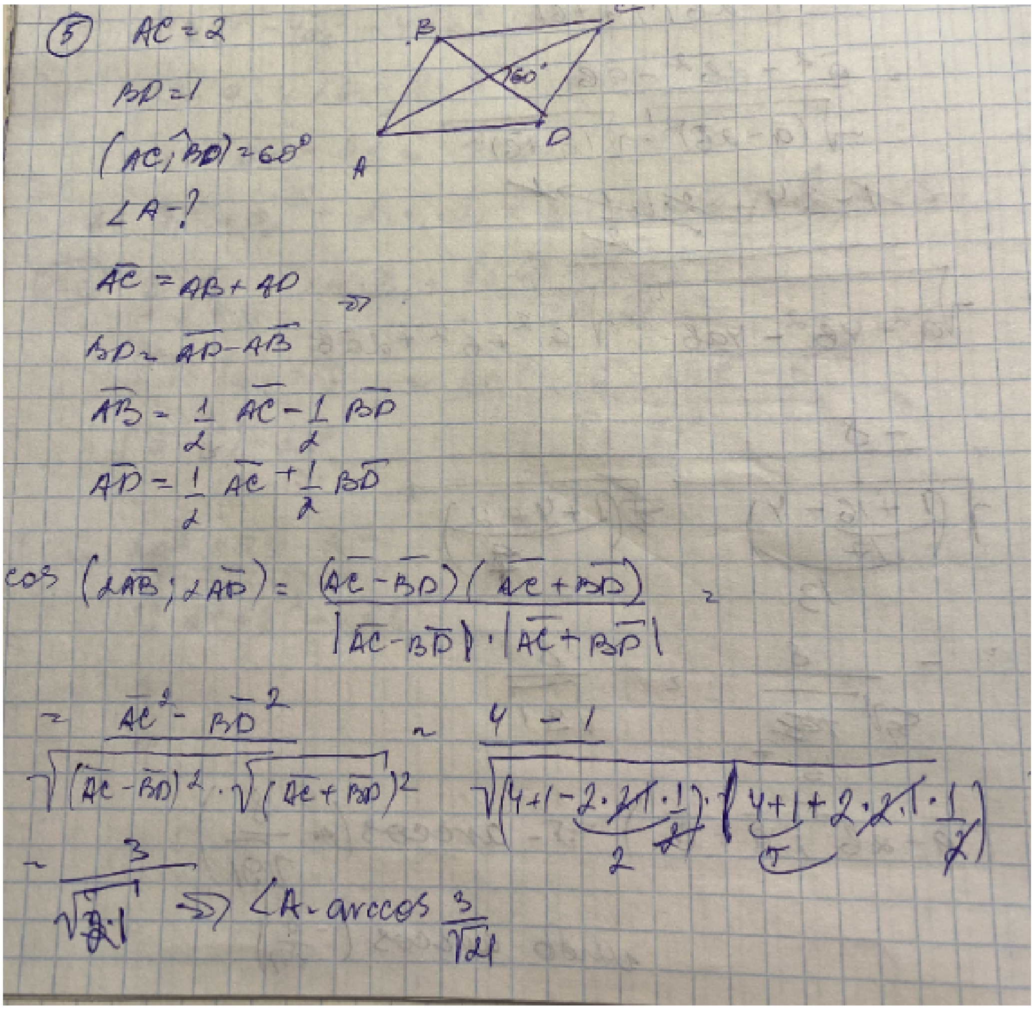
$|\overline{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$; $\quad |\overline{BC}| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$; $\quad |\overline{AC}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$;

$$\widehat{\overline{AB}, \overline{AC}} = \arccos\left(\frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}||\overline{AC}|}\right) = \arccos\left(\frac{-3 \cdot 4 + 0 - 4 \cdot (-3)}{5 \cdot 5}\right) = \frac{\pi}{2};$$

$$\widehat{\overline{BA}, \overline{BC}} = \arccos\left(\frac{-\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{|\overline{AB}||\overline{BC}|}\right) = \arccos\left(-\frac{-3 \cdot 7 + 0 - 4 \cdot 1}{5 \cdot 5\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4};$$

$$\widehat{\overline{CA}, \overline{CB}} = \arccos\left(\frac{-\overline{AC} \cdot (-\overline{BC})}{|\overline{AC}||\overline{BC}|}\right) = \arccos\left(\frac{4 \cdot 7 + 0 - 3 \cdot 1}{5 \cdot 5\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}. \triangleright$$

5. Диагонали $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$ образуют угол $60°$, при этом $|\overline{AC}| = 2$, $|\overline{BD}| = 1$. Найти угол параллелограмма при вершине A.



(5) $AC = 2$

$BD = 1$

$(\widehat{AC; BD}) = 60°$

$\angle A - ?$

$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$ $\Rightarrow$

$\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB}$

$\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{BD}$

$\overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{BD}$

$\cos(\angle AB; \angle AD) = \dfrac{(\overline{AC} - \overline{BD})(\overline{AC} + \overline{BD})}{|\overline{AC} - \overline{BD}| \cdot |\overline{AC} + \overline{BD}|} =$

$= \dfrac{\overline{AC}^2 - \overline{BD}^2}{\sqrt{(\overline{AC} - \overline{BD})^2} \cdot \sqrt{(\overline{AC} + \overline{BD})^2}} = \dfrac{4 - 1}{\sqrt{(4+1-2\cdot 2\cdot 1\cdot \frac{1}{2}) \cdot (4+1+2\cdot 2\cdot 1\cdot \frac{1}{2})}}$

$= \dfrac{3}{\sqrt{3\cdot 7}} \Rightarrow \angle A = \arccos\dfrac{3}{\sqrt{21}}$

Физический смысл скалярного произведения: работа постоянной по величине силы, затрачиваемая на перемещение материальной точки, равна $\bar{F} \cdot \bar{s}$, где $\bar{F}$ – вектор силы, а $\bar{s}$ – вектор перемещения точки.

2.84. Вычислить работу силы $\bar{F} = \bar{\imath} + 2\bar{\jmath} + \bar{k}$ при перемещении материальной точки из положения $A(-1, 2, 0)$ в положение $B(2, 1, 3)$.

$\triangleleft$ $\bar{s} = \overline{AB} = 3\bar{\imath} - \bar{\jmath} + 3\bar{k}$; $\quad A = \bar{F} \cdot \bar{s} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = 4.$ $\triangleright$

Биссектриса угла между двумя векторами может быть получена следующим образом. Пусть имеются два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$, отложенные от одной точки. Вычислим их орты $\bar{a}_0 = \bar{a}/|\bar{a}|$, $\bar{b}_0 = \bar{b}/|\bar{b}|$; тогда сумма $\bar{a}_0 + \bar{b}_0$ будет лежать на искомой биссектрисе.

2.87. Лучи $[OA)$, $[OB)$, $[OC)$ образуют попарно равные углы величины $\pi/3$. Найти угол между биссектрисами углов $\angle AOB$ и $\angle BOC$.

$\triangleleft$ Обозначим через $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ орты $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$. Вектор биссектрисы $\angle AOB$ равен $\bar{b}_{AOB} = \bar{a} + \bar{b}$, вектор биссектрисы $\angle BOC$ $\bar{b}_{BOC} = \bar{b} + \bar{c}$. По определению скалярного произведения имеем

$$\bar{b}_{AOB} \cdot \bar{b}_{BOC} = |\bar{b}_{AOB}||\bar{b}_{BOC}| \cos(\widehat{\bar{b}_{AOB}, \bar{b}_{BOC}}); \quad \cos(\widehat{\bar{b}_{AOB}, \bar{b}_{BOC}}) = \frac{\bar{b}_{AOB} \cdot \bar{b}_{BOC}}{|\bar{b}_{AOB}||\bar{b}_{BOC}|}.$$

Тогда

$$\cos(\widehat{\bar{b}_{AOB}, \bar{b}_{BOC}}) = \frac{(\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{b} + \bar{c})}{|\bar{a} + \bar{b}||\bar{b} + \bar{c}|} = \frac{\bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} + \bar{b}^2 + \bar{b}\bar{c}}{\sqrt{(\bar{a} + \bar{b})^2(\bar{b} + \bar{c})^2}} = \frac{\bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} + \bar{b}^2 + \bar{b}\bar{c}}{\sqrt{(\bar{a}^2 + 2\bar{a}\bar{b} + \bar{b}^2)(\bar{b}^2 + 2\bar{b}\bar{c} + \bar{c}^2)}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} + 1 + \cos\frac{\pi}{3}}{\sqrt{(1 + 2\cos\frac{\pi}{3} + 1)(1 + 2\cos\frac{\pi}{3} + 1)}} = \frac{5/2}{3} = \frac{5}{6}; \qquad \widehat{\bar b_{AOB}, \bar b_{BOC}} = \arccos\frac{5}{6}. \quad \triangleright$$

2.89. Вектор $\bar x$ перпендикулярен векторам $\bar a_1 = \{2, 3, -1\}$ и $\bar a_2\{1, -2, 3\}$ и удовлетворяет условию $\bar x(2\bar\imath - \bar\jmath + \bar k) = -6$. Найти координаты $\bar x$.

$\triangleleft$ Обозначим искомые координаты через X, Y и Z. Из условия

$$\begin{cases} \bar x \cdot \bar a_1 & = & 0 \\ \bar x \cdot \bar a_2 & = & 0 \\ \bar x \cdot (2\bar\imath - \bar\jmath + \bar k) & = & -6 \end{cases}, \text{ или в координатной записи } \begin{cases} 2X & +3Y & -Z & = & 0 \\ X & -2Y & +3Z & = & 0 \\ 2X & -Y & +Z & = & -6. \end{cases}.$$

Решая эту систему методом Крамера, получаем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 14;$$

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ -6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -42; \qquad \Delta_Y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 42; \qquad \Delta_Z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -6 \end{vmatrix} = 42.$$

$X = -3$, $Y = 3$, $Z = 3$. $\triangleright$

Д/з 2, 10, 22, 36, 45, 46, 52, 58;
66, 67, 71, 78 (а, б, д), 81, 88.