Семинар 23-24. Решение систем линейных алгебраических уравнений.

Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) называется система вида

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &=& b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &=& b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &=& b_m \end{array}$$

с коэффициентами в поле $\mathbb{F}$. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей системы*. Вектор

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

образует правую часть системы. СЛАУ называется *однородной*, если $B = 0$ и *неоднородной* в противном случае. Столбец неизвестных образует вектор

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Значит, в матричном виде СЛАУ может быть записана в виде

$$AX = B.$$

СЛАУ называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. *Общим решением* СЛАУ называется совокупность всех решений системы. *Частным решением* СЛАУ называется произвольное решение этой системы.

§1. Решение однородных СЛАУ.

Рассмотрим решение однородных СЛАУ:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &=& 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &=& 0, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &=& 0 \end{array}$$

или, в матричном виде,

$$AX = 0.$$

Однородная СЛАУ всегда совместна, поскольку $X = 0$ всегда является частным решением. Однако представляет интерес найти нетривиальные (не равные нулю) решения системы. Система имеет нетривиальные решения, если

$$\operatorname{Rg} A < n.$$

Оказывается, в этом случае множество решений СЛАУ образует векторное пространство размерности $n - \operatorname{Rg} A$. Таким образом, верна следующая теорема (rank-nullity theorem):

$$\operatorname{Rg} A + \operatorname{Null} A = \dim V,$$

где $\operatorname{Null} A$ — размерность пространства решений системы, $\dim V = n$ — размерность пространства неизвестных (количество неизвестных, или длина вектора X).

Рассмотрим решение систем линейных однородных систем линейных уравнений методом Гаусса. Для этого сначала приводим матрицу системы к ступенчатому виду, используя элементарные преобразования только строк, при этом нулевые (или линейно зависимые) строки можно сразу исключать из полученной матрицы, и выделяем столбцы базисного минора. Желательно выбирать их на „ступеньках“ матрицы, например, так:

$$\left(\begin{array}{|cc|c|c|c}\hline * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ \hline\end{array}\right).$$

Те переменные, коэффициенты перед которыми находятся в полученном базисном миноре, будем называть *базисными*, а остальные — *свободными*. Свободные переменные объявляем равными произвольным постоянным:

$$x_{i_1} = c_1, \quad \ldots, \quad x_{i_r} = c_r.$$

Используя полученный ступенчатый вид матрицы, выражаем базисные переменные через свободные. Таким образом, все переменные оказываются выраженными через постоянные $c_1, \ldots, c_r$. Число r в этом случае равно размерности пространства решений (то есть $r = \operatorname{Null} A$). После этого остается выписать решение системы в виде разложения по базису, где постоянные c_i оказываются равными коэффициентами разложения по базису. Векторы, которые образуют базис пространства решений однородной СЛАУ, называются *фундаментальной системой решений* (ФСР) этой однородной СЛАУ. По сути, эти векторы состоят из коэффициентов перед произвольными постоянными c_i.

Задача 3.224. Найти ФСР и общее решение однородной СЛАУ:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение: Матрица системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Приведем матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} {}_{+2\cdot \mathrm{II}} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Базисный минор образует коэффициент перед x_1, поэтому переменную x_1 считаем базисной, а переменные x_2, x_3 — свободными. Считаем их равными произвольным постоянным:

$$x_2 = c_1, \quad x_3 = c_2.$$

Запишем полученную систему уравнений:

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0.$$

В данном случае эта система состоит из единственного уравнения, поскольку ступенчатый вид матрицы содержит одну строку. Из уравнения выражаем базисную переменную x_1:

$$x_1 = 2x_2 + 3x_3 = 2c_1 + 3c_2.$$

Значит, общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 &= & 2c_1 + 3c_2, \\ x_2 &= & c_1, \\ x_3 &= & c_2. \end{cases}$$

Чтобы найти ФСР системы, запишем полученное решение системы в виде разложения по базису:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 + 3c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \boldsymbol{e_1} + c_2 \boldsymbol{e_2},$$

где векторы

$$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

образуют ФСР системы.

Задача 3.225. Найти ФСР и общее решение однородной СЛАУ:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= & 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= & 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= & 0. \end{cases}$$

Решение: Матрица системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Приведем матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}_{-\mathrm{I}} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-\mathrm{II}} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 2 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} -2\cdot\mathrm{I} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 11 & 13 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} -5\cdot\mathrm{III} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{-2\cdot\mathrm{II}} \sim \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -15 \end{matrix}}\right).$$

В результате получим, что свободных переменных нет. Это означает, что система имеет только тривиальное решение.

Задача 3.228. Найти ФСР и общее решение однородной СЛАУ:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 0. \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 &= 0. \end{cases}$$

Решение: Матрица системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix}.$$

Приведем матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -\mathrm{I} \\ -2\cdot\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to \mathrm{II} \\ \to \mathrm{I} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} -2\cdot\mathrm{I} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \sim \left(\boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} \begin{matrix} -2 \\ 0 \end{matrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 7 \end{matrix}} \begin{matrix} -1 \\ 5 \end{matrix} \right)$$

Базисными переменными являются x_1, x_3 (поскольку базисный минор состоит из первого и третьего столбца), свободными переменными будут x_2, x_4. Пусть

$$x_2 = c_1, \quad x_4 = c_2.$$

Тогда, записывая систему уравнений, полученную из ступенчатого вида матрицы системы, имеем

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 7x_3 + 5x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Из второго уравнения выражаем базисную переменную x_3:

$$x_3 = -\frac{5}{7}x_4 = -\frac{5}{7}c_2.$$

Из первого уравнения выражаем базисную переменную x_1:

$$x_1 = 2x_2 + x_3 + x_4 = 2c_1 - \frac{5}{7}c_2 + c_2 = 2c_1 + \frac{2}{7}c_2.$$

Таким образом, общее решение системы равно

$$\begin{cases} x_1 &= 2c_1 + \frac{2}{7}c_2, \\ x_2 &= c_1, \\ x_3 &= -\frac{5}{7}c_2, \\ x_4 &= c_2 \end{cases}$$

Чтобы найти ФСР системы, запишем полученное решение в виде разложения по базису:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 + \frac{2}{7}c_2 \\ c_1 \\ -\frac{5}{7}c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{c_2}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} = c_1 \boldsymbol{e_1} + \tilde{c}_2 \boldsymbol{e_2},$$

где векторы

$$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

образуют ФСР системы, а постоянную $\tilde{c}_2$ переобозначили следующим образом:

$$\frac{c_2}{7} = \tilde{c}_2.$$

Задача 3.230. Найти ФСР и общее решение однородной СЛАУ:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 & = & 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 & = & 0 \\ x_2 + x_3 + x_6 & = & 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 & = & 0. \end{cases}$$

Решение: Матрица системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приведем матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to \mathrm{V} \\ \\ \\ \\ \to \mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -\mathrm{I} \\ -\mathrm{II} \\ -\mathrm{I} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +\mathrm{II} \\ \\ -\mathrm{IV} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} \begin{matrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right)$$

Базисными являются переменные x_1, x_2, x_3, свободными — переменные x_4, x_5, x_6. Обозначим

$$x_4 = c_1, \quad x_5 = c_2, \quad x_6 = c_3.$$

Тогда, записывая систему уравнений, полученную из ступенчатого вида матрицы системы, имеем

$$\begin{aligned} x_1 - x_4 + x_5 &= 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Из третьего уравнения выражаем базисную переменную x_3:

$$x_3 = -x_4 = -c_1.$$

Из второго уравнения выражаем базисную переменную x_2:

$$x_2 = x_4 - x_6 = c_1 - c_3.$$

Из первого уравнения выражаем базисную переменную x_1:

$$x_1 = x_4 - x_5 = c_1 - c_2.$$

Таким образом, общее решение системы равно

$$\begin{cases} x_1 &= c_1 - c_2, \\ x_2 &= c_1 - c_3, \\ x_3 &= -c_1, \\ x_4 &= c_1, \\ x_5 &= c_2, \\ x_6 &= c_3 \end{cases}$$

Чтобы найти ФСР системы, запишем полученное решение в виде разложения по базису:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - c_2 \\ c_1 - c_3 \\ -c_1 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \boldsymbol{e_1} + c_2 \boldsymbol{e_2} + c_3 \boldsymbol{e_3},$$

где векторы

$$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

образуют ФСР системы.

Задача 1. Найти ФСР и общее решение однородной СЛАУ:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 0 \end{cases}$$

над полем вычетов $\mathbb{Z}_7$.

Решение: Вспомним сначала все обратные к элементам из поля $\mathbb{Z}_7$:

$$2^{-1} = 4, \quad 3^{-1} = 5, \quad 4^{-1} = 2, \quad 5^{-1} = 3, \quad 6^{-1} = 6.$$

Матрица системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Приведем матрицу к ступенчатому виду, выполняя преобразования в поле вычетов $\mathbb{Z}_7$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 5 \\ \cdot 4 \\ \cdot 5 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & 6 \\ 1 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 5 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} -\mathrm{II} \sim \left(\begin{array}{|cc|c} \hline 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ \hline \end{array}\right)$$

Базисными переменными являются x_1, x_2 (поскольку базисный минор состоит из первого и второго столбцов), свободной переменной будет x_3. Пусть

$$x_3 = c.$$

Тогда, записывая систему уравнений, полученную из ступенчатого вида матрицы системы, имеем

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & = & 0 \\ x_2 + 5x_3 & = & 0. \end{array}$$

Из второго уравнения выражаем базисную переменную x_2:

$$x_2 = -5x_3 = 2c.$$

Из первого уравнения выражаем базисную переменную x_1:

$$x_1 = -2x_2 = -4c = 3c.$$

Таким образом, общее решение системы равно

$$\begin{cases} x_1 & = & 3c, \\ x_2 & = & 2c, \\ x_3 & = & c. \end{cases}$$

Чтобы найти ФСР системы, запишем полученное решение в виде разложения по базису:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c \\ 2c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = c\boldsymbol{e_1},$$

где вектор

$$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

образует ФСР системы.

Задача 2. Найти ФСР и общее решение однородной СЛАУ:

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 2x_4 + 5x_5 & = & 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 + 4x_5 & = & 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 2x_5 & = & 0 \end{cases}$$

над полем вычетов $\mathbb{Z}_7$.

Решение: Матрица системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Приведем матрицу к ступенчатому виду, выполняя преобразования в поле вычетов $\mathbb{Z}_7$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 5 \\ \cdot 2 \\ \\ \cdot 2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} -\mathrm{III} \\ -\mathrm{III} \\ \\ -\mathrm{III} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to \mathrm{III} \\ \cdot 5 \\ \to \mathrm{I} \\ \cdot 2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \cdot \mathrm{III} \\ -3 \cdot \mathrm{III} \\ \\ -5 \cdot \mathrm{III} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Базисными переменными являются x_1, x_2, x_4, свободными переменными являются x_3, x_5. Пусть

$$x_3 = c_1, \quad x_5 = c_2.$$

Тогда, записывая систему уравнений, полученную из ступенчатого вида матрицы системы, имеем

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_5 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Переменную x_2 выразим из второго уравнения:

$$x_2 = -3x_3 = 4c_1.$$

Переменную x_1 выразим из первого уравнения:

$$x_1 = -2x_2 - 4x_5 = -8c_1 - 4c_2 = 6c_1 + 3c_2.$$

Таким образом, общее решение системы равно

$$\begin{cases} x_1 = 6c_1 + 3c_2, \\ x_2 = 4c_1, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = 0, \\ x_5 = c_2 \end{cases}$$

Чтобы найти ФСР системы, запишем полученное решение в виде разложения по базису:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6c_1 + 3c_2 \\ 4c_1 \\ c_1 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \boldsymbol{e_1} + c_2 \boldsymbol{e_2},$$

где векторы

$$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

образуют ФСР системы.

Решим обратную задачу.

Задача 3. Общее решение некоторой СЛАУ имеет вид:

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T + c_2 \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Какое наименьшее число уравнений может иметь такая система? Приведите пример системы с таким решением.

Решение: Векторы

$$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}^T$$

образуют ФСР системы. Следовательно, размерность пространства решений (количество векторов в ФСР) равна

$$\operatorname{Null} A = 2.$$

Размерность пространства состояний (длина векторов $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$) равна

$$n = \dim V = 4,$$

откуда применение теоремы о структуре общего решения однородной СЛАУ (rank-nullity theorem) дает

$$\operatorname{Rg} A = n - \operatorname{Null} A = 4 - 2 = 2.$$

Следовательно, ранг матрицы искомой системы равен 2, а значит, матрица не может иметь меньше двух строк, а система — не меньше двух уравнений.

Опишем метод нахождения таких уравнений. Пусть уравнение имеет вид

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0.$$

Вектор $\boldsymbol{e_1}$ является решением этого уравнения, а значит, при подстановке в уравнение (вместо неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4) получим верное тождество. Отсюда:

$$a + b + 2c - d = 0.$$

Аналогично подставляем $\boldsymbol{e_2}$:

$$3a - 2b + d = 0.$$

В итоге имеем следующую систему на коэффициенты a, b, c, d:

$$\begin{cases} a + b + 2c - d & = & 0 \\ 3a - 2b + d & = & 0 \end{cases}$$

Матрица полученной системы уравнений имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Видно, что в этой матрице <u>по строкам</u> записаны координаты векторов фундаментальной системы решений. Не обязательно находить общее решение этой системы, достаточно найти два линейно независимых решения. Однако эти два линейно независимых решения могут быть выбраны как ФСР этой системы. Найдем ФСР:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}_{+\mathrm{I}} \sim \left(\begin{array}{c|c|c|c|} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Переменные b, d являются базисными, a, c — свободными. Пусть

$$a = c_1, \quad c = c_2.$$

Из второго уравнения найдем b:

$$b = -4a = -4c_1.$$

Из первого уравнения найдем d:

$$d = a + b + 2c = c_1 - 4c_1 + 2c_2 = -3c_1 + 2c_2.$$

Таким образом, общее решение системы равно

$$\begin{cases} a &= c_1, \\ b &= -4c_1, \\ c &= c_2, \\ d &= -3c_1 + 2c_2. \end{cases}$$

Чтобы найти ФСР системы, запишем полученное решение в виде разложения по базису:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ -4c_1 \\ c_2 \\ -3c_1 + 2c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = c_1 \boldsymbol{f_1} + c_2 \boldsymbol{f_2},$$

где векторы

$$\boldsymbol{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

образуют ФСР системы. Подставим в уравнение

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0$$

вместо a, b, c, d найденные координаты ФСР, получим искомую систему:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 3x_4 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \end{cases}$$

§2. Коммутирующие матрицы.

Матрицы A и B называются *коммутирующими* (перестановочными), если выполнено

$$AB = BA.$$

Понятно, что если матрица A квадратная порядка n, то матрица B также квадратная и имеет порядок n. Для любой квадратной матрицы A коммутирующими будут нулевая и единичная матрицы, а также сама матрица A и A^T. Если A невырождена, то матрица A^{-1} также коммутирует с A. Кроме того, с матрицей A с элементами в поле $\mathbb{F}$ также коммутируют матрицы kI, kA, где $k \in \mathbb{F}$. Таким образом, для каждой матрицы A с элементами над бесконечным полем существует бесконечное число перестановочных с ней матриц.

Задача 4. Найти все матрицы, коммутирующие с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение: Найдем все матрицы B вида

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

такие, что

$$AB = BA.$$

Произведение AB равно

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 & x_2 + 2x_4 \\ 3x_1 + 4x_3 & 3x_2 + 4x_4 \end{pmatrix}.$$

Произведение BA равно

$$BA = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 & 2x_1 + 4x_2 \\ x_3 + 3x_4 & 2x_3 + 4x_4 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая элементы полученных матриц, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 & = & x_1 + 3x_2 \\ x_2 + 2x_4 & = & 2x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 + 4x_3 & = & x_3 + 3x_4 \\ 3x_2 + 4x_4 & = & 2x_3 + 4x_4 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 3x_2 - 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_4 & = & 0 \\ 3x_1 + 3x_3 - 3x_4 & = & 0 \\ 3x_2 - 2x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Матрица системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Приведем матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} : 3 \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to \mathrm{III} \\ \\ \to \mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} -2 \cdot \mathrm{I} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{matrix}} \begin{matrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{matrix} \right)$$

Базисными переменными являются x_1, x_2, свободными — x_3, x_4. Пусть

$$x_3 = c_1, \quad x_4 = c_2.$$

Из второго уравнения найдем x_2:

$$x_2 = \frac{2}{3} x_3 = \frac{2}{3} c_1.$$

Из первого уравнения найдем x_1:

$$x_1 = -x_3 + x_4 = -c_1 + c_2.$$

ФСР записывать не будем, поскольку по условию задачи этого не требуется. Запишем сразу вид матрицы B:

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 + c_2 & \frac{2}{3}c_1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Для проверки полученного ответа можно вычислить матрицы AB и BA и убедиться, что получаются одинаковые матрицы.

Задача 5. Найти все матрицы, коммутирующие с матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение: Найдем все матрицы B вида

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

такие, что

$$AB = BA.$$

Произведение AB равно

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 & 2x_2 + x_4 \\ 2x_3 & 2x_4 \end{pmatrix}.$$

Произведение BA равно

$$BA = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & x_1 + 2x_2 \\ 2x_3 & x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая элементы полученных матриц, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 &= 2x_1 \\ 2x_2 + x_4 &= x_1 + 2x_2 \\ 2x_3 &= 2x_3 \\ 2x_4 &= x_3 + 2x_4 \end{cases}$$

Даже не записывая матрицу полученной системы, из первого уравнения можно найти

$$x_3 = 0.$$

Из последнего уравнения также получаем

$$x_3 = 0,$$

что не является новой информацией. Третье уравнение также бесполезно. Из второго уравнения получаем

$$x_1 = x_4.$$

На переменную x_2 уравнения нет, а потому считаем ее свободной:

$$x_2 = c_1.$$

Также будем считать свободной переменную x_4, откуда имеем

$$x_4 = c_2, \quad x_1 = x_4 = c_2.$$

Запишем вид матрицы B:

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 & c_1 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}.$$

§3. Решение неоднородных СЛАУ.

Рассмотрим решение систем вида:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \dots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

или

$$AX = B$$

при $B \neq 0$. Такая система не всегда совместна. Например, очевидно, что система двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} x + 3y & = & 4 \\ x + 3y & = & 5 \end{cases}$$

решений не имеет.

Расширенной матрицей системы $AX = B$ называется блочная матрица вида

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Критерий Кронекера - Капелли дает ответ на вопрос, является ли неоднородная система совместной: неоднородная система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы. Например, для уже рассмотренного примера матрица системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

и ранг матрицы системы равен 1, в то время как ранг расширенной матрицы системы

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

равен 2. Согласно критерию Кронекера-Капелли, такая система несовместна.

Для решения неоднородной СЛАУ можно поступить так же, как и для решения однородной, но элементарные преобразования нужно выполнять над строками расширенной матрицы. Согласно *теореме о структуре общего решения линейной неоднородной системы*, общее решение неоднородной СЛАУ складывается из общего решения однородной системы и некоторого частного решения неоднородной системы:

$$y_{\text{он}} = y_{\text{чн}} + y_{\text{оо}}.$$

Задача 3.206. Исследовать совместность и найти общее решение неоднородной системы

$$\begin{cases} 2x - y + z &= -2 \\ x + 2y + 3z &= -1 \\ x - 3y - 2z &= 3. \end{cases}$$

Решение: Расширенная матрица системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right).$$

Приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \to \mathrm{II} \\ \to \mathrm{I} \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -2\cdot\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 4 \end{array}\right).$$

Из этой системы уже видно, что система несовместна (последние два уравнения противоречат друг другу). Для формального исследования системы на совместность можно сделать еще одно элементарное преобразование:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -\mathrm{II} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right),$$

откуда видно, что ранг матрицы системы равен 2, а ранг расширенной матрицы равен 3, а значит, по критерию Кронекера-Капелли система несовместна.

Задача 3.239. Найти общее решение неоднородной системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 &= 2 \\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= -1. \end{cases}$$

Решение: Расширенная матрица системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -4 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & -1 \end{array}\right).$$

Приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -4 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ +\mathrm{I} \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} -\mathrm{III} \\ :2 \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \end{array}\right).$$

Базисными являются переменные x_1, x_2, свободными — x_3, x_4, x_5. Пусть

$$x_3 = c_1, \quad x_4 = c_2, \quad x_5 = c_3.$$

Перепишем систему, соответствующую ступенчатому виду расширенной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 & = & 1 \\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 & = & -1. \end{cases}$$

Из первого уравнения сразу известно x_1:

$$x_1 = 1.$$

Из второго уравнения находим x_2:

$$x_2 = -\frac{3}{2}x_3 - \frac{4}{2}x_4 - \frac{5}{2}x_5 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}c_1 - 2c_2 - \frac{5}{2}c_3 - \frac{1}{2}.$$

Таким образом, общее решение системы равно

$$\begin{cases} x_1 & = & 1, \\ x_2 & = & -\frac{3}{2}c_1 - 2c_2 - \frac{5}{2}c_3 - \frac{1}{2}, \\ x_3 & = & c_1, \\ x_4 & = & {}_2, \\ x_5 & = & c_3. \end{cases}$$

Запишем это решение в виде:

$$y_{\text{он}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2}c_1 - 2c_2 - \frac{5}{2}c_3 - \frac{1}{2} \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = y_{\text{чн}} + y_{\text{оо}},$$

где

$$y_{\text{чн}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad - \quad \begin{matrix}\text{частное решение} \\ \text{неоднородной системы,}\end{matrix}$$

$$y_{\text{оо}} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1\boldsymbol{e_1} + c_2\boldsymbol{e_2} + c_3\boldsymbol{e_3} \quad - \quad \begin{matrix}\text{общее решение} \\ \text{однородной системы.}\end{matrix}$$

Векторы

$$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

образуют ФСР соответствующей однородной системы.

Задача 3.210. Исследовать совместность и найти общее решение неоднородной системы

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4 & = & 6\\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4 & = & 4\\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4 & = & 2. \end{array}\right.$$

Решение: Расширенная матрица системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6\\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4\\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right).$$

Приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6\\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4\\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\mathrm{I} \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6\\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2\\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to \mathrm{II} \\ \to \mathrm{I} \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & -2\\ 2 & 7 & 3 & 1 & 6\\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\cdot\mathrm{I} \sim \\ -9\cdot\mathrm{I} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10\\ 0 & 22 & 10 & -2 & 20 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -2\cdot\mathrm{II} \end{array} \sim\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\boxed{\begin{array}{cc} 1 & -2\\ 0 & 11 \end{array}} \begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -2\\ 5 & -1 & 10 \end{array}\right)$$

Базисными являются переменные x_1, x_2, свободными — переменные x_3, x_4. Пусть

$$x_3=c_1, \quad x_4=c_2.$$

Из второго уравнения найдем x_2:

$$x_2=-\frac{5}{11}x_3+\frac{1}{11}x_4+\frac{10}{11}=-\frac{5}{11}c_1+\frac{1}{11}c_2+\frac{10}{11}.$$

Из первого уравнения найдем x_1:

$$x_1=2x_2+x_3-x_4-2=-\frac{10}{11}c_1+\frac{2}{11}c_2+\frac{20}{11}+c_1-c_4-2=\frac{1}{11}c_1-\frac{9}{11}c_2-\frac{2}{11}.$$

Таким образом, общее решение системы равно

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \frac{1}{11}c_1-\frac{9}{11}c_2-\frac{2}{11},\\ x_2 & = & -\frac{5}{11}c_1+\frac{1}{11}c_2+\frac{10}{11},\\ x_3 & = & c_1,\\ x_4 & = & {}_2, \end{array}\right.$$

Запишем это решение в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{11}c_1-\frac{9}{11}c_2-\frac{2}{11}\\ -\frac{5}{11}c_1+\frac{1}{11}c_2+\frac{10}{11}\\ c_1\\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{11}\\ \frac{10}{11}\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{11}\\ -\frac{5}{11}\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{9}{11}\\ \frac{1}{11}\\ 0\\ 1 \end{pmatrix} = y_{\text{чн}}+y_{\text{оо}},$$

где

$$y_{\text{чн}}=\begin{pmatrix} -\frac{2}{11}\\ \frac{10}{11}\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \quad - \quad \begin{array}{c}\text{частное решение}\\ \text{неоднородной системы,}\end{array}$$

$$y_{\text{оо}} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{11} \\ -\frac{5}{11} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{9}{11} \\ \frac{1}{11} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1\boldsymbol{e_1} + c_2\boldsymbol{e_2} \quad - \quad \begin{matrix}\text{общее решение} \\ \text{однородной системы.}\end{matrix}$$

Векторы

$$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} \\ -\frac{5}{11} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{11} \\ \frac{1}{11} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

образуют ФСР соответствующей однородной системы.

Кстати, решение получится без дробей, если базисный минор выбрать следующим образом:

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} \boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}-2\\11\end{matrix} & \begin{matrix}-1\\5\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}} & \begin{matrix}-2\\10\end{matrix} \end{array}\right).$$

Базисными тогда будут переменные x_1, x_4, свободными — переменные x_2, x_3. Пусть

$$x_2 = c_1, \quad x_3 = c_2.$$

Из второго уравнения найдем x_4:

$$x_4 = 11x_2 + 5x_3 - 10 = 11c_1 + 5c_2 - 10.$$

Из первого уравнения найдем x_1:

$$x_1 = 2x_2 + x_3 - x_4 - 2 = 2c_1 + c_2 - 11c_1 - 5c_2 + 10 - 2 = -9c_1 - 4c_2 + 8.$$

Таким образом, общее решение системы равно

$$\begin{cases} x_1 &= -9c_1 - 4c_2 + 8, \\ x_2 &= c_1, \\ x_3 &= c_2, \\ x_4 &= 11c_1 + 5c_2 - 10, \end{cases}$$

Запишем это решение в виде:

$$y_{\text{он}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9c_1 - 4c_2 + 8 \\ c_1 \\ c_2 \\ 11c_1 + 5c_2 - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = y_{\text{чн}} + y_{\text{оо}},$$

где

$$y_{\text{чн}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} \quad - \quad \begin{matrix}\text{частное решение} \\ \text{неоднородной системы,}\end{matrix}$$

$$y_{\text{оо}} = c_1 \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = c_1\boldsymbol{e_1} + c_2\boldsymbol{e_2} \quad - \quad \begin{matrix}\text{общее решение} \\ \text{однородной системы.}\end{matrix}$$

Векторы

$$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

образуют ФСР соответствующей однородной системы.

Итак, решение может быть записано разным образом, но оба эти способа описывают одно и то же множество решений.

Задача 6. Найти общее решение СЛАУ

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 & = & 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 & = & 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 & = & 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_5 & = & 4 \end{cases}$$

над полем вычетов $\mathbb{Z}_5$.

Решение: Вспомним обратные элементы к элементам поля вычетов $\mathbb{Z}_5$:

$$2^{-1} = 3, \quad 3^{-1} = 2, \quad 4^{-1} = 4.$$

Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду, выполняя преобразования в поле вычетов $\mathbb{Z}_5$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 3 \\ \cdot 2 \\ \cdot 2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot 3 \\ \cdot 2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 3 \\ \\ -\mathrm{III} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\mathrm{II} \\ \\ \\ \cdot 4 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \to \mathrm{III} \\ \to \mathrm{II} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

Базисными являются переменные x_1, x_2, x_3, свободными — переменные x_4, x_5. Пусть

$$x_4 = c_1, \quad x_5 = c_2.$$

Из третьего уравнения найдем x_3:

$$x_3 = -3x_3 - 4x_5 = 2c_1 + c_2.$$

Из второго уравнения найдем x_2:

$$x_2 = -3x_3 - 2x_4 - 2x_5 + 2 = 4c_1 + 2c_2 + 3c_1 + 3c_2 + 2 = 2c_1 + 2.$$

Из первого уравнения найдем x_1:

$$x_1 = -4x_1 + 2 = 2c_1 + 2 + 2 = 2c_1 + 4.$$

Таким образом, общее решение системы равно

$$\begin{cases} x_1 &= 2c_1+4, \\ x_2 &= 2c_1+2, \\ x_3 &= 2c_1+c_2, \\ x_4 &= c_1, \\ x_5 &= c_2 \end{cases}$$

Запишем это решение в виде:

$$y_{\text{он}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1+4 \\ 2c_1+2 \\ 2c_1+c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = y_{\text{чн}} + y_{\text{оо}},$$

где

$$y_{\text{чн}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad - \quad \begin{array}{c}\text{частное решение} \\ \text{неоднородной системы}\end{array}, \quad y_{\text{оо}} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad - \quad \begin{array}{c}\text{общее решение} \\ \text{однородной системы.}\end{array}$$

Задача 7. Найти общее решение СЛАУ

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2+4x_3+3x_4+3x_5 &= 0 \\ 3x_1+6x_2+3x_3+x_4+4x_5 &= 1 \\ 3x_1+4x_2+6x_3+x_4+x_5 &= 0 \\ 6x_1+5x_2+4x_3+5x_4+2x_5 &= 1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3+4x_5 &= 2 \end{cases}$$

над полем вычетов $\mathbb{Z}_7$.

Решение: Вспомним обратные элементы к элементам поля вычетов $\mathbb{Z}_7$:

$$2^{-1}=4, \quad 3^{-1}=5, \quad 4^{-1}=2, \quad 5^{-1}=3, \quad 6^{-1}=6.$$

Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду, выполняя преобразования в поле вычетов $\mathbb{Z}_7$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2&5&4&3&3&0 \\ 3&6&3&1&4&1 \\ 3&4&6&1&1&0 \\ 6&5&4&5&2&1 \\ 4&3&5&0&4&2 \end{array}\right)\begin{array}{l}\cdot 4\\ \cdot 5\\ \cdot 5\\ \cdot 6\\ \cdot 2\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&6&2&5&5&0 \\ 1&2&1&5&6&5 \\ 1&6&2&5&5&0 \\ 1&2&3&2&5&6 \\ 1&6&3&0&1&4 \end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \\ -\mathrm{II}\\ -\mathrm{I}\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&6&2&5&5&0 \\ 1&2&1&5&6&5 \\ 0&0&2&4&6&1 \\ 0&0&1&2&3&4 \end{array}\right)\begin{array}{l}\\ -\mathrm{I}\\ \cdot 4\\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&6&2&5&5&0 \\ 0&3&6&0&1&5 \\ 0&0&1&2&3&4 \\ 0&0&1&2&3&4 \end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \cdot 5\\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&6&2&5&5&0 \\ 0&1&2&0&5&4 \\ 0&0&1&2&3&4 \end{array}\right)\begin{array}{l}-\mathrm{II}\\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\boxed{\begin{matrix} 1&5&0 \\ 0&1&2 \\ 0&0&1 \end{matrix}}\begin{matrix} 5&0 \\ 0&5 \\ 2&3 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{matrix}\right.\right)$$

Базисными являются переменные x_1, x_2, x_3, свободными — переменные x_4, x_5. Пусть

$$x_4 = c_1, \quad x_5 = c_2.$$

Из третьего уравнения найдем x_3:

$$x_3 = -2x_4 - 3x_5 + 4 = 5c_1 + 4c_2 + 4.$$

Из второго уравнения найдем x_2:

$$x_2 = -2x_3 - 5x_5 + 4 = 4c_1 + c_2 + 3.$$

Из первого уравнения найдем x_1:

$$x_1 = -5x_2 - 5x_4 + 2 = 3c_1 + 2c_2 + 2.$$

Таким образом, общее решение системы равно

$$\begin{cases} x_1 &= 3c_1 + 2c_2 + 2, \\ x_2 &= 4c_1 + c_2 + 3, \\ x_3 &= 5c_1 + 4c_2 + 4, \\ x_4 &= c_1, \\ x_5 &= c_2 \end{cases}$$

Запишем это решение в виде:

$$y_{\text{он}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_1 + 2c_2 + 2 \\ 4c_1 + c_2 + 3 \\ 5c_1 + 4c_2 + 4 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = y_{\text{чн}} + y_{\text{оо}},$$

где

$$y_{\text{чн}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad - \quad \begin{matrix} \text{частное решение} \\ \text{неоднородной системы} \end{matrix}, \quad y_{\text{оо}} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad - \quad \begin{matrix} \text{общее решение} \\ \text{однородной системы.} \end{matrix}$$

Решим обратную задачу.

Задача 8. Общее решение некоторой СЛАУ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 3c_1 + c_2, & c_1 + c_2, & -2c_1 - c_2, & 3c_2 + 1 \end{pmatrix}^T.$$

Какое наименьшее число уравнений может иметь такая система? Приведите пример системы с таким решением.

Решение: Сначала представим общее решение в виде:

$$y_{\text{он}} = y_{\text{чн}} + y_{\text{оо}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

где

$$y_{\text{чн}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad - \quad \begin{matrix} \text{частное решение} \\ \text{неоднородной системы} \end{matrix}, \quad y_{\text{оо}} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad - \quad \begin{matrix} \text{общее решение} \\ \text{однородной системы.} \end{matrix}$$

Векторы

$$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

образуют ФСР соответствующей однородной системы.

Количество векторов в ФСР равно

$$\operatorname{Null} A = 2,$$

размерность пространства равна

$$n = 4,$$

откуда ранг матрицы системы равен

$$\operatorname{Rg} A = n - \operatorname{Null} A = 4 - 2 - 2.$$

Значит, система имеет как минимум два уравнения.

Составим сначала однородную систему. Для этого, как уже разбиралось в задаче 3, нужно записать векторы из ФСР по строкам и решить получить однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} -\mathrm{I} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 6 \\ -3 \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Полагая свободные переменные равными произвольным значениям

$$a = c_1, \quad d = c_2,$$

из второго уравнения находим

$$c = 2c_1 - 3c_2,$$

а из первого уравнения

$$b = c_1 - 6c_2,$$

а значит, общее решение записанной системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 - 6c_2 \\ 2c_1 - 3c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Координаты ФСР дают коэффициенты искомой системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ -6x_2 - 3x_3 + x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Чтобы получить вид искомой неоднородной системы, подставляем частное решение неоднородной системы $y_{\text{чн}}$ в левую часть полученной СЛАУ, вычисляя таким образом правую часть:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ -6x_2 - 3x_3 + x_4 & = & 1 \end{cases}$$

Эта система имеет данное общее решение.

Разберем напоследок две небольшие теоретические задачи.

Задача 9. Пусть известно, что обе системы

$$\left\{\begin{array}{rcl} A_1x+B_1y+C_1z & = & D_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z & = & D_2 \end{array}\right. \quad \text{и} \quad \left\{\begin{array}{rcl} A_3x+B_3y+C_3z & = & D_3 \\ A_4x+B_4y+C_4z & = & D_4 \end{array}\right.$$

совместны. Может ли система

$$\left\{\begin{array}{rcl} A_1x+B_1y+C_1z & = & D_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z & = & D_2 \\ A_3x+B_3y+C_3z & = & D_3 \\ A_4x+B_4y+C_4z & = & D_4 \end{array}\right.$$

быть совместной? Несовместной? Ответ обосновать.

Решение: Будем рассуждать геометрически. Каждая система уравнений задает либо плоскость (если уравнения линейно зависимы), либо прямую (если уравнения независимы). Это зависит от рангов матриц

$$r_1 = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix}.$$

Система

$$\left\{\begin{array}{rcl} A_1x+B_1y+C_1z & = & D_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z & = & D_2 \\ A_3x+B_3y+C_3z & = & D_3 \\ A_4x+B_4y+C_4z & = & D_4 \end{array}\right.$$

может быть совместна, если

- Это одна и та же прямая (или плоскость),
- Эти две прямые (или плоскости, или плоскость и прямая) пересекаются.

Кроме того, эта система может быть несовместна, если

- Эти две прямые параллельны или скрещиваются,
- Прямая параллельна плоскости,
- Две плоскости параллельны.

Задача 10. Пусть прямая L и плоскость α заданы уравнениями

$$L\colon \left\{\begin{array}{rcl} A_1x+B_1y+C_1z+D_1 & = & 0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2 & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{и} \quad \alpha\colon A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

В терминах рангов

$$r = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}, \quad R = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}.$$

выразить условия:
1) L пересекает, но не содержится в α,

2) L не пересекает α,
3) L содержится в α.

Решение:

1) Если L пересекает, но не содержится в α, то решение системы

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 &= 0 \end{cases}$$

единственно. Тогда $r = 3$, откуда немедленно следует, что $R = 3$.
2) Если L не пересекает α, то система

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 &= 0 \end{cases}$$

несовместна, то есть критерий Кронекера-Капелли должен быть не выполнен. Отсюда получаем

$$r = 2, \quad R = 3.$$

Ранг r равен 2, поскольку система уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{cases}$$

задает прямую.
3) Если L содержится в α, то система

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 &= 0 \end{cases}$$

совместна, но пространство решений одномерно (поскольку все точки прямой L являются решениями системы). Следовательно,

$$r = 2, \quad R = 2.$$