Семинар 21. Кватернионы

Кватернионом называется алгебраический объект вида $t+\boldsymbol{u}$, где $t\in\mathbb{R}$, $\boldsymbol{u}\in V_3$. Здесь t называется *скалярной частью* кватерниона, а $\boldsymbol{u}$ — векторной частью. Множество кватернионов образует ассоциативную некоммутативную алгебру с единицей и делением над $\mathbb{R}$. При этом числа и векторы являются частными случаями кватернионов. Произведение кватернионов вычисляется следующим образом. Пусть $q=t+\boldsymbol{u}$, $p=s+\boldsymbol{v}$. Тогда

$$q\cdot p=(t\cdot s-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})+(t\boldsymbol{v}+s\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}).$$

Задача 1. Вычислить произведение кватернионов $q_1=1+2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$, $q_2=3+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$.
Решение: Имеем

$$t=1,\quad \boldsymbol{u}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},\qquad s=3,\quad \boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}.$$

Вычислим все слагаемые произведения кватернионов. Скалярная часть:

$$t\cdot s=3,\quad \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=2-0-3=-1.$$

Векторная часть:

$$t\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k},\quad s\cdot\boldsymbol{u}=6\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-1&3\\1&0&-1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$$

В итоге получим

$$q_1\cdot q_2=3-(-1)+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}+6\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k}+\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}=4+8\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k}.$$

Ответ: $4+8\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k}$.

Длиной кватерниона $q=x+y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}+w\boldsymbol{k}$ называется число $\|q\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2+w^2}$. Кватернион называется *единичным*, если его длина равна 1. *Сопряженным* к кватерниону $q=t+\boldsymbol{u}$ называется кватернион $\bar{q}=t-\boldsymbol{u}$. *Обратным* к кватерниону $q=t+\boldsymbol{u}$ называется кватернион $\frac{\bar{q}}{\|q\|^2}$.

С помощью кватернионов можно задать вращения в трехмерном пространстве.

Пусть вращение в трехмерном пространстве задано углом α и **единичным** вектором $\boldsymbol{u}$. Тогда такому вращению соответствует кватернион

$$q=\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{u}.$$

Пусть $\boldsymbol{v}'$ — вектор, полученный из $\boldsymbol{v}$ вращением отноительно оси $\boldsymbol{u}$ на угол α, причем $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}'$, $q=\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{u}$ — соответствующие кватернионы. Тогда

$$\boldsymbol{v}'=q\boldsymbol{v}q^{-1}.$$

Рассмотрим, куда переходит вектор $\boldsymbol{v}$ в результате произведения двух кватернионов p и q:

$$pq\boldsymbol{v}(pq)^{-1}=pq\boldsymbol{v}q^{-1}p^{-1}=p(q\boldsymbol{v}q^{-1})p^{-1},$$

что соответствует сначала вращению, заданному кватернионом q, а потом — вращению, заданному кватернионом p. Таким образом, чтобы найти ось и угол трехмерного вращения, заданного кватернионами p и q, надо найти произведение $q \cdot p$.

Задача 2. Найти угол и ось поворота трехмерного вращения, которое получается в результате сначала вращения вокруг оси, заданной вектором $(1,0,0)$ на угол $90°$ в положительном направлении, а затем вращения вокруг оси, заданной вектором $(0,1,1)$ на угол $180°$.

Решение: Первое вращение задается кватернионом

$$\frac{\alpha}{2} = 45°, \quad \boldsymbol{u}_0 = (1,0,0), \quad q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i},$$

а второе — кватернионом

$$\frac{\alpha}{2} = 90°, \quad \boldsymbol{u}_0 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), \quad q_2 = 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}.$$

Компоненты этих кватернионов равны

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}, \qquad s = 0, \quad \boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}.$$

Для того, чтобы найти ось и угол результирующего вращения, нужно найти произведение

$$q = q_2 \cdot q_1.$$

Вычислим элементы произведения кватернионов:

$$s \cdot t = 0, \quad \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} = 0,$$

$$s \cdot \boldsymbol{u} = 0, \quad t \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}.$$

В итоге получим

$$q_2 \cdot q_1 = 0 + \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}\boldsymbol{k} + \frac{1}{2}\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}\right) = \boldsymbol{j}.$$

Скалярная часть полученного кватерниона равна нулю, а значит, $\cos\frac{\alpha}{2} = 0$, то есть $\alpha = 180°$. Векторная часть образует единичный вектор $\boldsymbol{j}$. Получили кватернион, который соответствует вращению на $180°$ относительно оси $\boldsymbol{j}$.

Ответ: ось $\boldsymbol{j}$, угол $180°$.

Задача 3. Найти угол и ось поворота трехмерного вращения, которое получается в результате сначала вращения вокруг оси, заданной вектором $(-10,2,11)$ на угол $90°$ в положительном направлении, а затем вращения вокруг оси, заданной вектором $(2,-1,2)$ на угол $90°$ в положительном направлении.

Решение: Первое вращение задается кватернионом

$$\frac{\alpha}{2} = 45°,\ \boldsymbol{u}_0 = -\frac{2}{3}\boldsymbol{i} + \frac{2}{15}\boldsymbol{j} + \frac{11}{15}\boldsymbol{k}, \quad q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{2}{3}\boldsymbol{i} + \frac{2}{15}\boldsymbol{j} + \frac{11}{15}\boldsymbol{k}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{15}\boldsymbol{j} + \frac{11}{15\sqrt{2}}\boldsymbol{k},$$

а второе — кватернионом

$$\frac{\alpha}{2} = 45°,\ \boldsymbol{u}_0 = \frac{2}{3}\boldsymbol{i} - \frac{1}{3}\boldsymbol{j} + \frac{2}{3}\boldsymbol{k}, \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{i} - \frac{1}{3}\boldsymbol{j} + \frac{2}{3}\boldsymbol{k}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{3}\boldsymbol{i} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\boldsymbol{j} + \frac{\sqrt{2}}{3}\boldsymbol{k}.$$

Компоненты этих кватернионов равны

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \boldsymbol{u} = -\frac{\sqrt{2}}{3}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{15}\boldsymbol{j} + \frac{11}{15\sqrt{2}}\boldsymbol{k}, \qquad s = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \boldsymbol{v} = \frac{\sqrt{2}}{3}\boldsymbol{i} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\boldsymbol{j} + \frac{\sqrt{2}}{3}\boldsymbol{k}.$$

Для того, чтобы найти ось и угол результирующего вращения, нужно найти произведение

$$q = q_2 \cdot q_1.$$

Вычислим элементы произведения кватернионов:

$$s \cdot t = \frac{1}{2}, \quad \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} = -\frac{2}{9} - \frac{1}{45} + \frac{11}{45} = 0,$$

$$s \cdot \boldsymbol{u} = -\frac{1}{3}\boldsymbol{i} + \frac{1}{15}\boldsymbol{j} + \frac{11}{30}\boldsymbol{k}, \quad t \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{3}\boldsymbol{i} - \frac{1}{6}\boldsymbol{j} + \frac{1}{3}\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \sqrt{2}/3 & -1/3\sqrt{2} & \sqrt{2}/3 \\ -\sqrt{2}/3 & \sqrt{2}/15 & 11/15\sqrt{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{6}\boldsymbol{i} - \frac{7}{15}\boldsymbol{j} - \frac{1}{15}\boldsymbol{k}.$$

В итоге получим

$$q_2 \cdot q_1 = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3}\boldsymbol{i} + \frac{1}{15}\boldsymbol{j} + \frac{11}{30}\boldsymbol{k} + \frac{1}{3}\boldsymbol{i} - \frac{1}{6}\boldsymbol{j} + \frac{1}{3}\boldsymbol{k} - \frac{1}{6}\boldsymbol{i} - \frac{7}{15}\boldsymbol{j} - \frac{1}{15}\boldsymbol{k} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\boldsymbol{i} - \frac{17}{30}\boldsymbol{j} + \frac{19}{30}\boldsymbol{k}.$$

Скалярная часть полученного кватерниона равна $\frac{1}{2}$, а значит, $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$, то есть $\alpha = 120°$. Векторная часть образует вектор $-\frac{1}{6}\boldsymbol{i} - \frac{17}{30}\boldsymbol{j} + \frac{19}{30}\boldsymbol{k}$, который равен произведению $\sin\frac{\alpha}{2}$ на единичный вектор, задающий направление вращения. Итак, получили кватернион, который соответствует вращению на $120°$ относительно оси $-\frac{1}{6}\boldsymbol{i} - \frac{17}{30}\boldsymbol{j} + \frac{19}{30}\boldsymbol{k}$ или $-5\boldsymbol{i} - 17\boldsymbol{j} + 19\boldsymbol{k}$.

Ответ: ось $-5\boldsymbol{i} - 17\boldsymbol{j} + 19\boldsymbol{k}$, угол $120°$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Вычислить произведение кватернионов $q_1 = 2 - \boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $q_2 = 2 + 3\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}$.

Задача 2. Найти угол и ось поворота трехмерного вращения, которое получается в результате сначала вращения вокруг оси, заданной вектором $(0, 1, 1)$ на угол $180°$, а затем вращения вокруг оси, заданной вектором $(0, 1, 0)$ на угол $90°$ в положительном направлении.