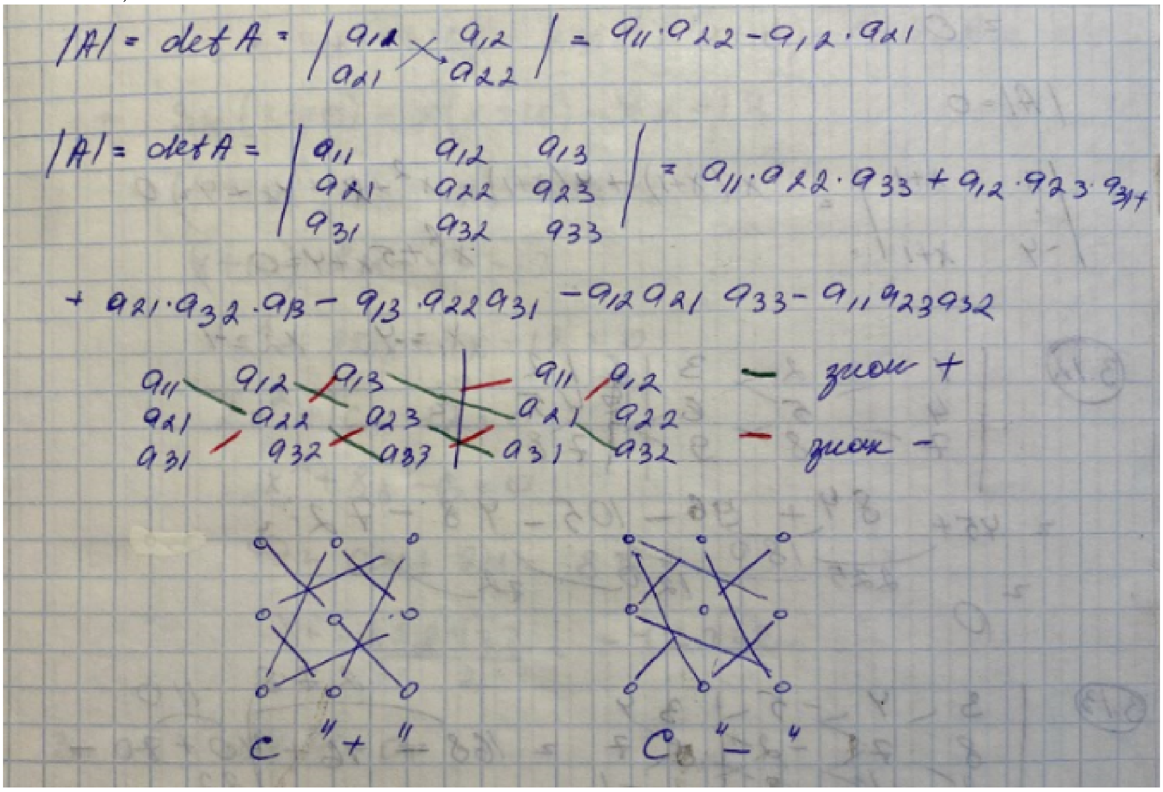
Семинары 1-2. Определители и их свойства

Определителем называется некоторая числовая характеристика квадратной матрицы. Рассмотрим нахождение определителей для матриц 2×2 (с 4 элементами) и 3×3 (с 9 элементами)



3.1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$.

$$\triangleleft \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 20 = 18. \triangleright$$

3.2. Вычислить определитель.

$$\triangleleft \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - (a-b)^2 = (a+b+a-b)(a+b-a+b) = 2a \cdot 2b = 4ab. \triangleright$$

3.8. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0.$

$\triangleleft \begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = x(x+1) + 4(x+1) = (x+4)(x+1).$ Ответ: $\{-4\} \cup \{-1\}. \triangleright$

3.12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

$$\triangleleft \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1{\cdot}5{\cdot}9 + 2{\cdot}6{\cdot}7 + 3{\cdot}4{\cdot}8 - 3{\cdot}5{\cdot}7 - 2{\cdot}4{\cdot}9 - 1{\cdot}6{\cdot}8 = 45+84+96-105-72-48 = 0. \triangleright$$

3.13. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$.

$$\triangleleft \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 3{\cdot}7{\cdot}8+8{\cdot}1{\cdot}5-2{\cdot}4{\cdot}2+5{\cdot}7{\cdot}2-3{\cdot}2{\cdot}1-8{\cdot}4{\cdot}8 = 168+40-16+70-6-256 = 0. \triangleright$$

3.19. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

$$\triangleleft \begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 3x(x+10) - 2x - x(x+10) - 9 - 2x = 2x^2 + 16x - 12;$$

$$2x^2 + 16x - 12 = 0 \Rightarrow \quad x^2 + 8x - 6 = 0 \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64+24}}{2} = -4 \pm \sqrt{22}. \triangleright$$

3.22. Решить неравенство $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$

$$\triangleleft \begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} = 2x - 10(x+2) + 3 + 5 - 12 - x(x+2) = -x^2 - 10x - 24;$$

$$-x^2 - 10x - 24 > 0 \Rightarrow \quad x^2 + 10x + 24 < 0 \Rightarrow \quad x \in (-6; -4). \triangleright$$

Свойства определителей.

1. Определитель не меняется при транспонировании.

2. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный.

3.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a'_{1j} + a''_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a'_{2j} + a''_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a'_{nj} + a''_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a'_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a'_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a'_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a''_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a''_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a''_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

4. Общий множитель строки (столбца) можно вынести за знак определителя:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \dots & \lambda a_{ij} & \dots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \lambda a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & \lambda a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \lambda a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

5. Определитель не изменится, если к любой строке(столбцу) прибавить линейную комбинацию других строк(столбцов):
$$\begin{vmatrix} a_{11} + \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k a_{1k} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k a_{2k} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k a_{nk} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

6. Определитель равен нулю, если он имеет:
   (a) нулевую строку (столбец);
   (b) две одинаковые строки (столбца);
   (c) строку (столбец), являющуюся линейной комбинацией других строк (столбцов).

3.25. Показать, используя свойства определителей, что

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$$\triangleleft \begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2 & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3 & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_1x & c_1 \\ a_2 & a_2x & c_2 \\ a_3 & a_3x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & a_1x & c_1 \\ b_2x & a_2x & c_2 \\ b_3x & a_3x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & b_1 & c_1 \\ b_2x & b_2 & c_2 \\ b_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + x^2 \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \triangleright$$

3.27. Вычислить, используя свойства определителей, $\begin{vmatrix} x+y & z & 1 \\ y+z & x & 1 \\ z+x & y & 1 \end{vmatrix}$.

$\triangleleft \begin{vmatrix} x+y & z & 1 \\ y+z & x & 1 \\ z+x & y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & z & 1 \\ y & x & 1 \\ z & y & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & z & 1 \\ z & x & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} =$ (меняем местами два столбца 2-го опр-ля) $=$
$= \begin{vmatrix} x & z & 1 \\ y & x & 1 \\ z & y & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} z & y & 1 \\ x & z & 1 \\ y & x & 1 \end{vmatrix} =$ (меняем местами первые две строки) $= \begin{vmatrix} x & z & 1 \\ y & x & 1 \\ z & y & 1 \end{vmatrix} +$
$+ \begin{vmatrix} x & z & 1 \\ z & y & 1 \\ y & x & 1 \end{vmatrix} =$ (меняем местами две последние строки) $= \begin{vmatrix} x & z & 1 \\ y & x & 1 \\ z & y & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & z & 1 \\ y & x & 1 \\ z & y & 1 \end{vmatrix} =$
0.

Другой вариант решения: прибавить к первому столбцу второй и получить определитель, в котором первый и третий столбцы пропорциональны. $\triangleright$

Основные методы вычисления определителей n-го порядка.

Рассмотрим сначала *метод понижения порядка* (метод алгебраических дополнений).

Алг. доп-е эл-та a_{ij}:

$$A^{(i,j)} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} \dots & a_{1,j-1} \dots & a_{1,j+1} \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,j-1} \dots & a_{i-1,j+1} \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,j-1} \dots & a_{i+1,j+1} \dots & a_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Таким образом, алгебраическое дополнение элемента a_{ij}— это определитель, получаемый вычеркиванием i-той строки и j-того столбца (с точностью до множителя $(-1)^{i+j}$).

Тогда можно определитель представить в виде разложения по столбцу или по строке:

~~Алгеб~~ Правило раскрытия определителя по строке / столбцу:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A^{(i,k)} \qquad \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A^{(k,j)}$$

по i-той строке   по j-тому столбцу

Пример Раскрыть определитель по 2-й стр.:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} A^{(2,1)} + a_{22} A^{(2,2)} + a_{23} A^{(2,3)} =$$

$$= -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

3.55. Вычислить определитель, используя разложение по строке или столбцу: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

◁ Раскладываем определитель по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 =$$

$= 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 = 0.$ ▷

3.59. Вычислить определитель, используя разложение по строке или столбцу: $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

◁ По первой строке:

$$\begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-a) \cdot \begin{vmatrix} a & -c & -e \\ b & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \end{vmatrix} + (-b) \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & -e \\ b & c & 0 \\ d & e & 0 \end{vmatrix} - (-d) \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & -c \\ b & c & 0 \\ d & e & 0 \end{vmatrix} =$$

$= 0 + 0 + be(be - cd) - cd(be - cd) = (be - cd)^2$. $\triangleright$

3.62. Вычислить определитель, используя разложение по строке или столбцу:

3.62

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} - 6\cdot\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 25\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} - 30\cdot\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} - 6\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 19\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} - 30\cdot\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 19(125-30-30)-30(25-6) = 19\cdot 65 - 30\cdot 19 = 35\cdot 19 = 665.$$

Теперь рассмотрим *метод элементарных преобразований*. Он основан на двух фактах:

1) Определитель не изменится, если к любой строке(столбцу) прибавить линейную комбинацию других строк(столбцов),

2) Определитель верхне-треугольной (или нижнетреугольной) матрицы равен произведению диагональных элементов.

3.61. Вычислить определитель, используя метод элементарных преобразований:

3.61

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} -(\mathrm{V}) \\ -(\mathrm{V}) \\ -(\mathrm{V}) \\ -(\mathrm{V}) \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ -\mathrm{I}-\frac{\mathrm{II}}{2}-\frac{\mathrm{III}}{3}-\frac{\mathrm{IV}}{4} \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11+\frac{65}{12} \end{vmatrix} = 394.$$

Теперь будем считать определители произвольного порядка n.

(1) Вычислить определитель порядка n:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \dots & 1 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 1 & \dots & 2 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Решение: Раскроем по 1-ой строке:

$$\Delta_n = \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \dots & 1 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 1 & \dots & 2 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & 2 \end{vmatrix}}_{n} = 2\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & \dots & 1 & 0 \\ & \dots & & \\ 1 & \dots & 2 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 2 \end{vmatrix}}_{n-1} + (-1)^{n+1}\cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & & \\ & \dots & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot 2\cdot (-1)^{2n-2} \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & \dots & 1 \\ & \dots & \\ 1 & \dots & 2 \end{vmatrix}}_{n-2} + \underbrace{(-1)^{n+1+n}}_{=-1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & \dots & 1 \\ & \dots & \\ 1 & & 2 \end{vmatrix}}_{n-2} = 3\cdot \Delta_{n-2}$$

$\Rightarrow \Delta_n = 3\cdot\Delta_{n-2}$ – рекурсивная формула

Найдём начальный элемент:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

Итак,

$$\Delta_n = \begin{cases} 3^{\frac{n}{2}}, & \text{если } n \text{ чётно} \\ 2\cdot 3^{\frac{n-1}{2}}, & \text{если } n \text{ нечётно} \end{cases}$$

② Вычислить определитель порядка n:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение: Раскроем определитель по 1-й стр.:

$$\Delta_n = \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{n} = 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{n-1} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \Delta_{n-1} - \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{n-2} = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$$

$\Rightarrow \Delta_n + \Delta_{n-2} = 2\Delta_{n-1} \Rightarrow$ Последов-ть $\{\Delta_n\}$ — арифметическая прогрессия.

Найдем первый элемент и разность этой прогрессии:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$\Rightarrow \Delta_n = n + 1.$

③ Вычислить определитель порядка n:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \ldots & 2 & 2 \\ & & & \ldots & & \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \ldots & 2 & 2 \\ & & \ldots & & & \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -(n) \\ -(n) \\ \ldots \\ -(n) \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & -1 \\ & & \ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ -2\cdot\mathrm{I}-\ldots-2\cdot(n-1) \end{matrix} =$$

$$a_{nn} = 3 \overbrace{-2\cdot(-1)-\ldots-2(-1)}^{n-1} = 3+2(n-1) = 2n+1$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -1 \\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 2n+1 \end{vmatrix} = 2n+1.$$

Для решения квадратных СЛАУ используется *метод Крамера.*

Метод Крамера решение квадратных СЛАУ:

Пусть задана СЛАУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Или, в матричном виде $AX = B$.

Правило Крамера: если $\det A \neq 0$, то

$x_i = \Delta_i / \Delta \quad i = 1, 2, \ldots, n,$

где Δ_i – определитель, полученный из Δ заменой i-того столбца на столбец свободных членов.

Решить следующие системы:

3.187. $\begin{cases} 3x - 5y &= 13 \\ 2x + 7y &= 81 \end{cases}$.

$\lhd\ \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 21 + 10 = 31; \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 13 & -5 \\ 81 & 7 \end{vmatrix} = 91 + 405 = 496;$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 2 & 81 \end{vmatrix} = 243 - 26 = 217$. Ответ: $x = \Delta_x/\Delta = 16, \quad y = \Delta_y/\Delta = 7$. $\triangleright$

3.189. $\begin{cases} 2ax - 3by &= 0 \\ 3ax - 6by &= ab \end{cases}$.

$\triangleleft$ $\Delta = \begin{vmatrix} 2a & -3b \\ 3a & -6b \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} 2a & -3b \\ 3a & -6b \end{vmatrix} = -3ab; \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -3b \\ ab & -6b \end{vmatrix} = 3ab^2;$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2a & 0 \\ 3a & ab \end{vmatrix} = 2a^2b$. Ответ: $x = \Delta_x/\Delta = -b, \quad y = \Delta_y/\Delta = -\dfrac{2}{3}a$. $\triangleright$

3.191. $\begin{cases} 2x + y &= 5 \\ x + 3z &= 16 \\ 5y - z &= 10 \end{cases}$.

$\triangleleft$ $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -30 + 1 = -29; \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 30 - 75 + 16 = -29;$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 10 & -1 \end{vmatrix} = -32 + 5 - 60 = -87; \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 25 - 10 - 160 = -145.$

Ответ: $x = 1, \quad y = 3, \quad z = 5$. $\triangleright$

3.198. $\begin{cases} 5x_1 & +8x_2 & +x_3 &= 2 \\ 3x_1 & -2x_2 & +6x_3 &= -7 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 &= -5 \end{cases}$.

$\triangleleft$ $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 + 96 + 3 + 4 - 30 + 24 = 107;$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 1 \\ -7 & -2 & 6 \\ -5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 240 - 7 - 10 - 12 - 56 = -321;$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & -7 & 6 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 35 + 24 - 15 + 14 + 150 + 6 = 214;$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 3 & -2 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 50 - 112 + 6 + 8 + 35 + 120 = 107.$

Ответ: $x_1 = -3, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 1$. $\triangleright$

3.196. Найти многочлен $f(x)$ второй степени, удовлетворяющий условиям $f(1) = -1$, $f(-1) = 9$, $f(2) = -3$.

$\triangleleft$ $f(x) = ax^2 + bx + c$; из условий получаем систему

$$\begin{cases} 1^2 \cdot a & +1 \cdot b & +c &= -1 \\ (-1)^2 \cdot a & -1 \cdot b & +c &= 9 \\ 2^2 \cdot a & +2 \cdot b & +c &= -3 \end{cases}.$$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 4 + 2 + 4 - 2 - 1 = 6;$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 9 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 + 18 - 3 + 2 - 9 = 6;\ a = 1.$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 4 - 3 - 36 + 3 + 1 = -30;\ b = -5.$$

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 9 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 + 36 - 2 - 4 - 18 + 3 = 18;\ c = 3.$$

Ответ: $f(x) = x^2 - 5x + 3$. ▷

Д/З 3.3, 9, 14, 20, 21, 24, 28, 50, 52, 60; 188; 190; 192; 199.

Вычислить определитель n-го пор.:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \ldots & 2 & 0 \\ & & \ldots & & \\ 0 & 2 & \ldots & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$