Семинар 19-20. Кольца и поля вычетов.

Комплексные числа

Расширение поля действительных чисел

Алгебра многочленов

§ 1. Кольца и поля вычетов

Кольцом вычетов наз. множество всех классов вычетов по модулю m, с операциями сложения и умножения по модулю. Это ассоциативное коммутативное кольцо с единицей.

Например, $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

·	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Аддитивной группой кольца вычетов называется $\{\mathbb{Z}_m, +\}$.

Мультипликативной группой $\mathbb{Z}_m^*$ кольца вычетов $\mathbb{Z}_m$ наз. множество всех обратимых элементов $\mathbb{Z}_m$ (по умножению).

Задача 1. Докажите, что элемент в $\mathbb{Z}_m$ обратим тогда и только тогда, когда он не является делителем нуля.

Решение: Число a наз. делителем нуля в кольце K, если $\exists\, b \neq 0 \in K$, такой, что $a \cdot b = 0$ (или $b \cdot a = 0$).

Например, делители нуля в $\mathbb{Z}_6$: 0, 2, 3, 4.

Если элемент a обратим, то $\exists a^{-1}: a \cdot a^{-1} = 1$.
Если при этом a является делителем нуля, то $\exists b \neq 0 : a \cdot b = 0$.

Тогда $\underbrace{a^{-1} \cdot a}_{=1} \cdot b = a^{-1} \cdot 0 = 0 \Rightarrow b = 0$. Получили противоречие.

∎

Таким образом, мультипликативную группу $\mathbb{Z}_m^*$ кольца вычетов $\mathbb{Z}_m$ образуют все числа $a \in \mathbb{Z}_m$, взаимно-простые с m: $(a, m) = 1$.

Например, $\mathbb{Z}_6^* = \{1, 5\}$:

·	1	5
1	1	5
5	5	1

$\simeq \mathbb{Z}_2$

Решим несколько задач о мультипликативных группах колец вычетов.

Задача 2. Найти все элементы мультипликативной группы $\mathbb{Z}_{12}^*$ кольца вычетов $\mathbb{Z}_{12}$. Какой из следующих групп изоморфна эта группа: $V_4, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_8, S_3, D_3$?

Решение: $\mathbb{Z}_{12}^* = \{1, 5, 7, 11\}$.

Составим таблицу Кэли по умножению:

$\cdot$	1	5	7	11
1	1	5	7	11
5	5	1	11	7
7	7	11	1	5
11	11	7	5	1

$\simeq V_4$ (четверная группа Клейна), поскольку:
$\operatorname{ord}(5) = 2$, $\operatorname{ord}(7) = 2$, $\operatorname{ord}(11) = 2$. ■

Задача 3. Доказать, что $\mathbb{Z}_4 \simeq \mathbb{Z}_5^*$

Решение: Таблица Кэли группы $\mathbb{Z}_4$ имеет вид:

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\operatorname{ord} 0 = 1$
$\operatorname{ord} 1 = 4$
$\operatorname{ord} 2 = 2$
$\operatorname{ord} 3 = 4$

Группу $\mathbb{Z}_5^*$ образуют элементы $\{1, 2, 3, 4\}$. Составим таблицу Кэли по умножению:

$\cdot$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$\operatorname{ord} 1 = 1$
$\operatorname{ord} 2 = 4$
$\operatorname{ord} 3 = 4$
$\operatorname{ord} 4 = 2$

Изоморфизм:

$\mathbb{Z}_4$		$\mathbb{Z}_5^*$
0	$\leftrightarrow$	1
1	$\leftrightarrow$	2
2	$\leftrightarrow$	4
3	$\leftrightarrow$	3

Задача 4. Вычислить 2020-ю степень элемента $a = 3$ в мультипликативной группе $\mathbb{Z}_{10}^*$ кольца вычетов $\mathbb{Z}_{10}$.

Решение: Сначала определим структуру такой группы.

$\mathbb{Z}_{10}^* = \{1, 3, 7, 9\}$ (взаимно простые числа с 10).

Составим таблицу Кэли по умножению:

$\cdot$	1	3	7	9
1	1	3	7	9
3	3	9	1	7
7	7	1	9	3
9	9	7	3	1

$\operatorname{ord} 1 = 1$
$\operatorname{ord} 3 = 4$
$\operatorname{ord} 7 = 4$
$\operatorname{ord} 9 = 2$.

Поскольку $\operatorname{ord} 3 = 4$, то $3^4 = 1 \Rightarrow (3^4)^{505} = 1 = 3^{2020}$.

Ответ: 1. ■

Задача 5. Вычислить 1313-ю степень элемента $a = 7$ в мультипликативной группе $\mathbb{Z}_{12}^*$ кольца вычетов $\mathbb{Z}_{12}$.

Решение: группу $\mathbb{Z}_{12}^*$ образуют элементы 1, 5, 7, 11.

	1	5	7	11
1	1	5	7	11
5	5	1	11	7
7	7	11	1	5
11	11	7	5	1

$$\operatorname{ord} 7 = 2 \Rightarrow 7^{1313} = 7^{1312+1} = (7^2)^{656} \cdot 7 = 1 \cdot 7 = 7. \blacksquare$$

Поле – маз. коммутативное кольцо с единицей, в котором каждый элемент $a \neq 0$ обратим.

Кольцо вычетов $\mathbb{Z}_p$ является полем тогда и только тогда, когда число p – простое.

Задача 6. Доказать, что в поле $\mathbb{Z}_p$ $(p-1)^{-1} = p-1$.

Решение: В самом деле, $(p-1)^2 = p^2 - 2p + 1 \equiv 1 \pmod p$

(числа p^2 и $-2p$ делятся на p, а потому $p^2 \equiv 0 \pmod p$, $-2p \equiv 0 \pmod p$) $\blacksquare$

В $\mathbb{Z}_7$: $1^{-1} = 1,\ 2^{-1} = 4,\ 3^{-1} = 5,\ 4^{-1} = 2,\ 5^{-1} = 3,\ 6^{-1} = 6.$

В $\mathbb{Z}_5$: $1^{-1} = 1,\ 2^{-1} = 3,\ 3^{-1} = 2,\ 4^{-1} = 4.$

В $\mathbb{Z}_{11}$: $1^{-1} = 1,\ 2^{-1} = 6,\ 3^{-1} = 4,\ 4^{-1} = 3,\ 5^{-1} = 9,\ 6^{-1} = 2,\ 7^{-1} = 8,\ 8^{-1} = 7,\ 9^{-1} = 5,\ 10^{-1} = 10.$

Используем эту информацию для решения систем уравнений в полях вычетов.

Задача 7. Решить систему уравнений в поле $\mathbb{Z}_7$:
$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 5x + 3y = 5 \end{cases}$$

Решение: Будем использовать для решения системы метод Крамера.

$2^{-1} = 4,\ 3^{-1} = 5,\ 4^{-1} = 2,\ 5^{-1} = 3,\ 6^{-1} = 6.$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 5 = 4.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 10 = 5.$$

Деление в поле вычетов выполняется так:

$$\boxed{\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}}$$

(Да и не только в поле вычетов.)

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \Delta x \cdot \Delta^{-1} = 1 \cdot 4^{-1} = 1 \cdot 2 = 2 \qquad \text{Ответ: } (2;3).$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \Delta y \cdot \Delta^{-1} = 5 \cdot 4^{-1} = 5 \cdot 2 = 3. \qquad ■$$

Обратите внимание, что все операции выполняем в поле вычетов. Оставлять ответ в виде $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{4}$ нельзя, таких элементов нет в $\mathbb{Z}_7$.

Задача 8. Решить систему уравнений в поле вычетов по модулю 5:

$$\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+y+2z=0 \\ 4x+3y+z=3 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} 2^{-1}=3 \\ 3^{-1}=2 \\ 4^{-1}=4 \end{matrix}}$$

Решение: Решим систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 13 = 3; \qquad \Delta x = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -17 = 3.$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 36 = 1; \qquad \Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -1 = 4.$$

Таким образом, получим:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \Delta x \cdot \Delta^{-1} = 3 \cdot 3^{-1} = 3 \cdot 2 = 1$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \Delta y \cdot \Delta^{-1} = 1 \cdot 3^{-1} = 1 \cdot 2 = 2$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \Delta z \cdot \Delta^{-1} = 4 \cdot 3^{-1} = 4 \cdot 2 = 3. \qquad \text{Ответ: } (1;2;3).$$

Предложим другой способ решения, основанный на методе Гаусса, а именно, с помощью эквив. преобразований. Например, можно добиться того, чтобы коэффициент перед переменной x в каждом уравнении был равен 1.

Для этого второе уравнение: $2x+y+2z=0$ умножим на $2^{-1}=3$:

$$x+3y+z=0.$$

А третье уравнение: $4x+3y+z=4$ умножим на $4^{-1}=4$:

$$x+2y+4z=2.$$

Получим систему:

$$\begin{cases} x+2y+3z=4 & (1) \\ x+3y+z=0 & (2) \\ x+2y+4z=2 & (3) \end{cases}$$

Вычитая из третьего уравнения первое, получим:

$$z=-2=3.$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим

$$y-2z=-4 \Leftrightarrow y+3z=1$$

Отсюда: $y = 2z+1 = 2\cdot 3+1 = 2.$

Подставляя в уравнение (1):

$$x = 4-2y-3z = 4-4-9 = 1 \Rightarrow \underline{(1;2;3)}. \blacksquare$$

<u>Задача 9.</u> Решить систему в поле вычетов по модулю 7:

$$\begin{cases} 3x+y+2z=4 \\ 2x+5y+z=1 \\ 3x+2y+5z=1 \end{cases}$$

$$\boxed{2^{-1}=4,\ 3^{-1}=5;\ 4^{-1}=2;\ 5^{-1}=3\ 6^{-1}=6.}$$

<u>Решение:</u> Решение методом Крамера дает:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 40 = 5; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 82 = 5;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -18 = 3; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -34 = 1.$$

получим: $x = \frac{\Delta x}{\Delta} = 5\cdot 5^{-1} = 1;$

$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = 3\cdot 5^{-1} = 3\cdot 3 = 2;$

$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = 1\cdot 5^{-1} = 3.$ Ответ: $(1;2;3)$ $\blacksquare$

<u>Задача 10.</u> В поле $\mathbb{Z}_{11}$ решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x+10y+2z=4 \\ 5x+2y+5z=0 \\ x+5y+7z=3. \end{cases}$$

<u>Решение:</u> Применение метода Крамера дает:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 10 & 2 \\ 5 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -287 = 10; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 10 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 94 = 6.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -135 = 8; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 10 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -40 = 4.$$

Достаточно знать обратный элемент только для Δ:

$$\Delta^{-1} = 10^{-1} = 10.$$

Имеем: $x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \Delta x\cdot\Delta^{-1} = 6\cdot 10 = 5.$

$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \Delta y\cdot\Delta^{-1} = 8\cdot 10 = 3$

$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \Delta z\cdot\Delta^{-1} = 4\cdot 10 = 7.$ Ответ: $(5;3;7)$. $\blacksquare$

Нахождение обратного элемента в кольце вычетов

В простейших случаях, конечно, обратный элемент можно подобрать, например, $2^{-1}=3$ в $\mathbb{Z}_5$.

Нахождение обратного элемента в общем случае основано на алгоритме Евклида и соотношении Безу.

Пусть надо найти $b=a^{-1}$ для элемента a в кольце вычетов $\mathbb{Z}_m$. Для этого числа m и a должны быть взаимно просты:

$$НОД(a, m) = 1$$

Значит, существуют такие целые u, v, что

$$u \cdot a + v \cdot m = 1 \pmod m$$

$\Rightarrow$ $ua = 1 \pmod m$ (т.к. число $v \cdot m$ делится на m)

$$\Rightarrow \boxed{a^{-1} = u}$$

Если в соотношении Безу число u получим не из кольца $\mathbb{Z}_m$ (например, $u<0$ или $u>m$), то надо найти такой $\tilde{u} \in (0; m)$, что $u = \tilde{u} \pmod m$.

Задача 11. Найти элемент, обратный к $a=57$ в поле $\mathbb{Z}_{101}$.

Решение: $НОД(57, 101) = 1$.

Применим алгоритм Евклида

$$\begin{aligned}
101 &= 1 \cdot 57 + 44 & &\Rightarrow 44 = 101 - 1 \cdot 57\\
57 &= 1 \cdot 44 + 13 & &\Rightarrow 13 = 57 - 1 \cdot 44\\
44 &= 3 \cdot 13 + 5 & &\Rightarrow 5 = 44 - 3 \cdot 13\\
13 &= 2 \cdot 5 + 3 & &\Rightarrow 3 = 13 - 2 \cdot 5\\
5 &= 1 \cdot 3 + 2 & &\Rightarrow 2 = 5 - 1 \cdot 3\\
3 &= 1 \cdot 2 + 1 & &\Rightarrow 1 = 3 - 1 \cdot 2\\
2 &= 2 \cdot 1 + 0
\end{aligned}$$

Соотношение Безу имеет вид:

$$39 \cdot 57 - 22 \cdot 101 = 1 \Rightarrow 57^{-1} = 39. \blacksquare$$

Задача 12. Найти элемент, обратный к $a=71$ в поле вычетов $\mathbb{Z}_{113}$.

Решение: $НОД(71, 113) = 1$.

Применим алгоритм Евклида

$$\begin{aligned}
113 &= 1 \cdot 71 + 42 & &\Rightarrow 42 = 113 - 1 \cdot 71\\
71 &= 1 \cdot 42 + 29 & &\Rightarrow 29 = 71 - 1 \cdot 42\\
42 &= 1 \cdot 29 + 13 & &\Rightarrow 13 = 42 - 1 \cdot 29\\
29 &= 2 \cdot 13 + 3 & &\Rightarrow 3 = 29 - 2 \cdot 13\\
13 &= 4 \cdot 3 + 1 & &\Rightarrow 1 = 13 - 4 \cdot 3\\
3 &= 3 \cdot 1 + 0
\end{aligned}$$

Соотношение Безу имеет вид:

$$-35 \cdot 71 + 22 \cdot 113 = 1 \Rightarrow 71^{-1} = -35 = 78. \blacksquare$$

Малая теорема Ферма

Если a — целое число, а p — простое число, то

$$\boxed{a^{p-1} \equiv 1 \pmod m}$$ (малая теор. Ферма)

В более общем случае, если a — целое число, а m — натуральное, причем НОД$(a, m) = 1$, то

$$\boxed{a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m}$$ (теор. Эйлера)

где $\varphi(m)$ — функция Эйлера, т.е. количество целых чисел из промежутка $[0; m]$, взаимно простых с m.

Использование теоремы Эйлера или малой теоремы Ферма дает возможность находить большие степени элементов в мультипликативных группах полей вычетов (без отдельного исследования таких групп).

Задача 13. Вычислить 2020-ю степень элемента $a=3$ в мультипликативной группе $\mathbb{Z}_{10}^*$ кольца вычетов $\mathbb{Z}_{10}$.

Решение: Такую задачу мы уже решали: это задача 4. Решим её теперь с помощью теоремы Эйлера.

$$\varphi(10) = 4.$$

Для нахождения $\varphi(10)$ достаточно выписать все целые числа от 1 до 10, вычеркнув те, которые имеют с числом 10 общие делители.

$$\underline{1}\ \cancel{2}\ \underline{3}\ \cancel{4}\ \cancel{5}\ \cancel{6}\ \underline{7}\ \cancel{8}\ \underline{9}\ \cancel{10} \Rightarrow \varphi(10) = 4.$$

Значит, $a^4 \equiv 1 \pmod{10}$ - теор. Эйлера

$$\Rightarrow a^{2020} = (a^4)^{505} = 1. \blacksquare$$

Задача 14. Вычислить 1313-ю степень элемента $a=7$ в мультипликативной группе $\mathbb{Z}_{12}^*$ кольца вычетов $\mathbb{Z}_{12}$.

Решение: Это задача 5. Предложим другой способ решения, основанный на теореме Эйлера.

$$\underline{1}\ \cancel{2}\ \cancel{3}\ \cancel{4}\ \underline{5}\ \cancel{6}\ \underline{7}\ \cancel{8}\ \cancel{9}\ \cancel{10}\ \underline{11}\ \cancel{12} \Rightarrow \varphi(12) = 4.$$

Значит, $a^4 \equiv 1 \pmod{12}$ - теор. Эйлера

$$\Rightarrow a^{1313} = a^{1312} \cdot a = (a^4)^{328} \cdot a = a = 7. \blacksquare$$

Задача 15. Вычислить 2017-ю степень элемента $a=3$ в мультипликативной группе $\mathbb{Z}_{11}^*$ кольца вычетов $\mathbb{Z}_{11}$.

Решение: Эта группа состоит из 10 элементов, а потому исследование группы и нахождение порядка элемента $a=3$ заняло бы слишком много времени.

Применим малую теорему Ферма:

$$\boxed{3^{10} \equiv 1 \pmod{11}}$$

Значит, $a^{2017} = a^{2010} \cdot a^7 = (a^{10})^{201} \cdot a^7 = a^7$

Или $a^{2017} = a^{2020} \cdot a^{-3} = (a^{10})^{202} \cdot a^{-3} = a^{-3}$.

Значит, надо вычислить либо a^7, либо a^{-3}. Имеем:

$a^7 = 3^7 = 3^4 \cdot 3^3 = 81 \cdot 27 = 4 \cdot 5 = 9$

Или: $a^{-1} = 3^{-1} = 4$ (можно найти подбором) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 3^{-3} = 4^3 = 64 = 9$. ∎

<u>Задача 16.</u> Найти 13^{216} в группе $\mathbb{Z}_{17}^*$.

<u>Решение:</u> Малая теорема Ферма дает:

$$13^{16} \equiv 1 \pmod{17}$$

$\Rightarrow 13^{216} = 13^{208} \cdot 13^8 = (13^{16})^{13} \cdot 13^8 = 13^8$.

При этом $13^8 = (-4)^8 = \underbrace{(+2)^{16}}_{(-1)^8 \cdot 4^8} \equiv 1 \pmod{17}$.

Ответ: 1.

<u>Задача 17.</u> Найти 15^{527} в группе $\mathbb{Z}_{19}^*$.

<u>Решение:</u> Малая теорема Ферма дает

$$15^{18} \equiv 1 \pmod{19}.$$

$\Rightarrow 15^{527} = 15^{522} \cdot 15^5 = (15^{18})^{29} \cdot 15^5 = 15^5$.

При этом $15^5 = (-4)^5 \equiv$

$\equiv (-1)^5 \cdot 4^5 = -4^5 = -2^{10} = -1024 \equiv 2 \pmod{19}$

Ответ: 2.

В последних двух задачах использовалась след. формула:

$$a \equiv a-m \pmod{m}.$$

Иногда число $a-m$ по модулю оказывается меньше a и возводить в большие степени его проще.

§ 2. Поле комплексных чисел

Комплексным числом (в алгебраической форме) называется выражение вида $x+iy$, где

$i^2 = -1$, i – мнимая единица

При этом x – действительная часть комплексного числа. Обозначается: $\operatorname{Re}(x+iy) = x$

y – мнимая часть комплексного числа обозначается: $\operatorname{Im}(x+iy) = y$

Множество комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$ и является полем.

Сумма, разность и произведение комплексных чисел x_1+iy_1 и x_2+iy_2 вычисляется по обычным правилам работы с многочленами с учетом $i^2=-1$:

$$(x_1+iy_1) \pm (x_2+iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i\,(y_1 \pm y_2).$$

$$(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2) = x_1x_2 + i\,x_1y_2 + i\,x_2y_1 + \underbrace{i^2}_{=-1} y_1y_2 =$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Сопряжённым к числу $x+iy$ наз. число $x-iy$. Заметим, что произведение комплексного числа и его комплексно-сопряженного действительно и неотрицательно:

$$(x+iy)(x-iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2+y^2 \geqslant 0$$

Если $z = x+iy$, то $\bar{z} = x-iy \Rightarrow z\cdot\bar{z} \geqslant 0$.

Для того, чтобы найти частное двух комплексных чисел, нужно домножить на комплексно-сопряженное к знаменателю:

$$\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\cdot\frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{x_2^2+y_2^2} = \frac{x_1x_2 - i\,x_1y_2 + i\,x_2y_1 - \overset{=-1}{i^2}y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

Например,

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i+\overset{=-1}{i^2}}{1+1} = \frac{-2i}{2} = -i.$$

Модулем комплексного числа $z = x+iy$ наз. действительное число

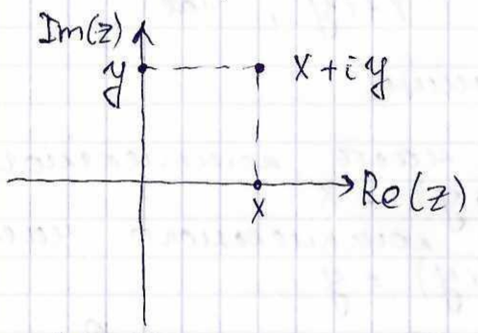
$$|z| = \sqrt{z\cdot\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

Аргументом комплексного числа наз. такой угол φ, что

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|}\,;\quad \sin\varphi = \frac{y}{|z|}.\quad \text{Обозн.: } \arg z$$

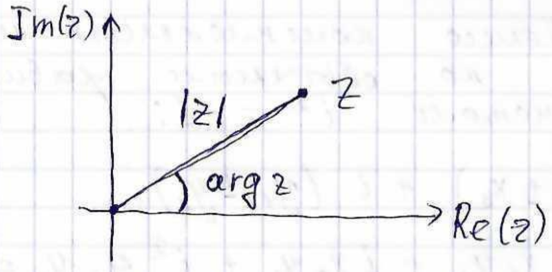
Множества на комплексной плоскости

Комплексные числа можно изображать на плоскости точками с координатами $(x; y)$



Ось x — ось действ. части (действительная ось)
Ось y — ось мнимой части (мнимая ось)

Изобразим модуль и аргумент комплексного числа на комплексной плоскости:



$|z|$ — расстояние от точки с координатами $(x; y)$ до начала координат

$\arg z$ — угол, который радиус-вектор составляет с действительной осью

Таким образом, $|z_1 - z_2|$ — расстояние между точками z_1 и z_2.

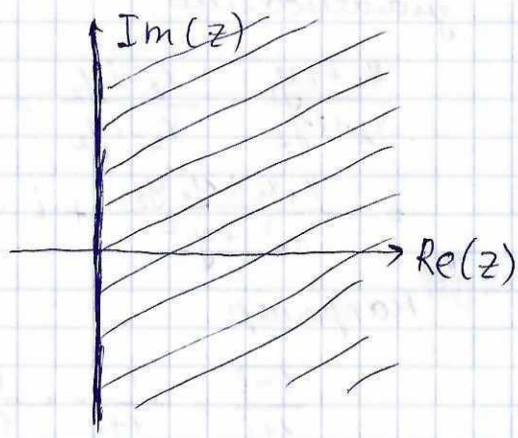
В следующих задачах определить, как на комплексной плоскости выглядит область, определяемая неравенством или системой неравенств.

Если граница области принадлежит заданному множеству, будем рисовать её сплошной линией, иначе — штриховой линией.

(18) $\operatorname{Re} z \geq 0$

Это правая полуплоскость.
Граница области — мнимая ось.

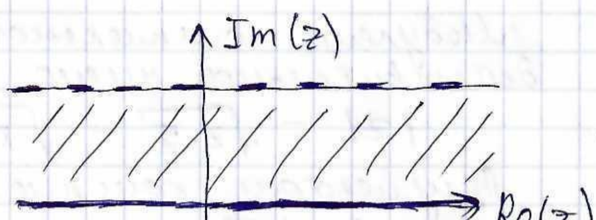
$\operatorname{Re}(z) = x$, а потому это неравенство эквивалентно $x \geq 0$.



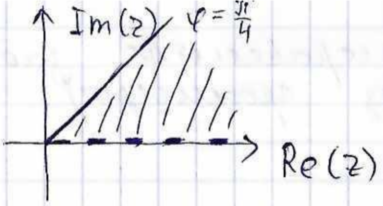
(19) $0 \leq \operatorname{Im} z < 1$

Горизонтальная полоса ширины 1:

$0 \leq y < 1$



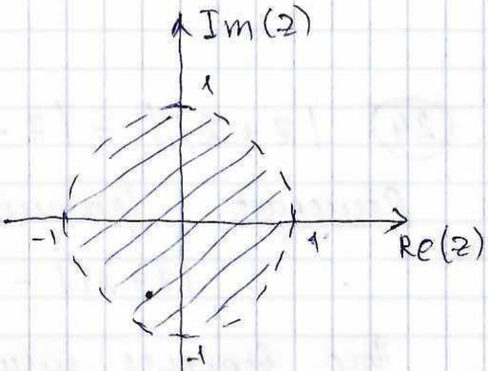
(20) $0 < \arg z \le \frac{\pi}{4}$



Сектор, ограниченный прямыми
$\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{4}$

(21) $|z| < 1$

Множество точек, расстояние от которых до начала координат меньше 1 — внутренность круга с центром в начале координат и радиусом 1 (без границы).



Или: $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} < 1 \Rightarrow$

$x^2+y^2 < 1$

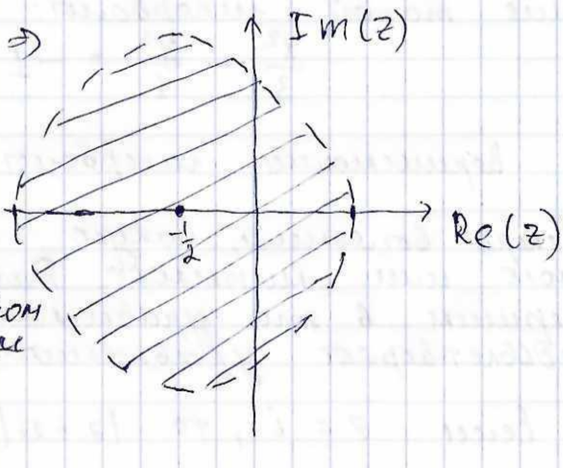
(22) $|z|^2 + \operatorname{Re} z < 1$

Здесь $|z|^2 = x^2+y^2$; $\operatorname{Re} z = x \Rightarrow$

$x^2+y^2+x < 1$

$\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+y^2-\frac{1}{4} < 1$

$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2 < \frac{5}{4}$ —



это внутренность круга ~~радиусом~~ с центром $(-\frac{1}{2};0)$ и радиусом $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

(23) $|z+\sqrt{2}i| + |z-\sqrt{2}i| < 3$

Решение: Граница этой области — это кривая, определяемая равенством:

$$|z+\sqrt{2}i| + |z-\sqrt{2}i| = 3. \quad (*)$$

$|z+\sqrt{2}i|$ — расстояние от точки z до точки $-\sqrt{2}i$.
$|z-\sqrt{2}i|$ — расстояние от точки z до точки $\sqrt{2}i$.

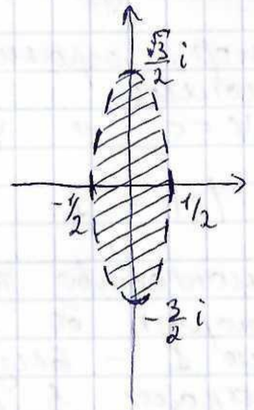
Геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух заданных точек — это эллипс, фокусы которого располагаются в этих точках.

Таким образом, фокусы эллипса (*) расположены в точках $(0;\pm\sqrt{2})$ (или $\pm\sqrt{2}i$). Большая полуось эллипса равна $3/2$. $\Rightarrow$ $c=\sqrt{2}$; $a=\frac{3}{2} \Rightarrow b=\sqrt{\frac{9}{4}-2}=\frac{1}{2}$

Большая полуось этого эллипса расположена на оси Oy (мнимой оси). Каноническое уравнение такого эллипса:

$$\frac{x^2}{1/4}+\frac{y^2}{9/4}=1..$$

Данное неравенство задает внутреннюю часть этого эллипса (без границы).



(24) $|z+2i| - |z-2i| \leq 2$

Решение: Граница области определяется неравенством:

$$|z+2i| - |z-2i| = 2 \qquad (*)$$

Это верхняя или нижняя ветвь гиперболы с фокусами $(0; \pm 2)$ (или $\pm 2i$). 1 — действительная полуось гиперболы.

$\Rightarrow c = 2,\ a = 1 \Rightarrow b = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$. Каноническое уравнение такой гиперболы:

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = -1$$

(Поскольку фокусы располагаются на оси Oy, то и действительная полуось тоже).

Вершинами гиперболы являются точки $(0; \pm 1)$ (или $\pm i$).

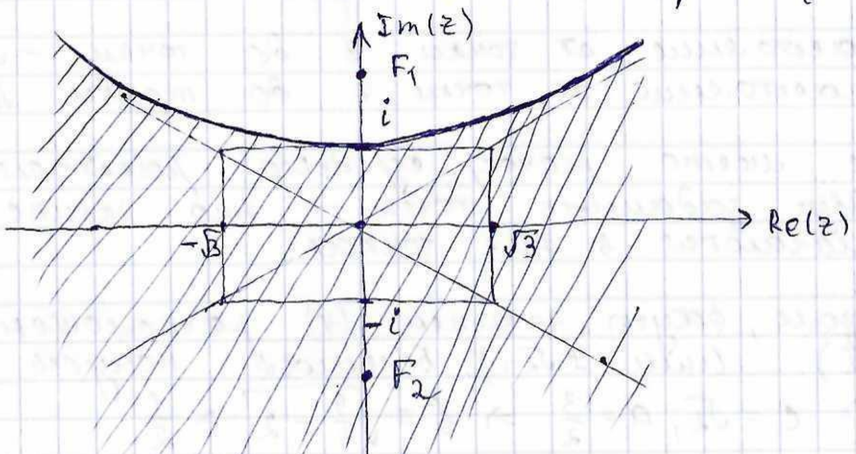
Теперь выясним, какую ветвь задает уравнение $(*)$ — верхнюю или нижнюю. Для этого подставим координаты вершин в это уравнение и выясним, какая из вершин удовлетворяет уравнению $(*)$.

Если $z = i$, то $|z+2i| - |z-2i| = |3i| - |-i| = 3 - 1 = 2$ (подходит)

Если $z = -i$, то $|z+2i| - |z-2i| = |i| - |-3i| = 1 - 3 \neq 2$! (не подходит)

$\Rightarrow$ Уравнение $(*)$ задает верхнюю ветвь.

Данное неравенство задает множество точек, которые находятся ниже этой ветви гиперболы (с границей).



(25) $|z-1| \geq 2 + \operatorname{Re} z$

Решение: Граница области: $|z-1| = 2 + \operatorname{Re} z$

$|z-1|$ — расстояние от т. z до 1.

$2 + \operatorname{Re} z = 2 + x$ — расстояние от точки z до прямой $x = -2$

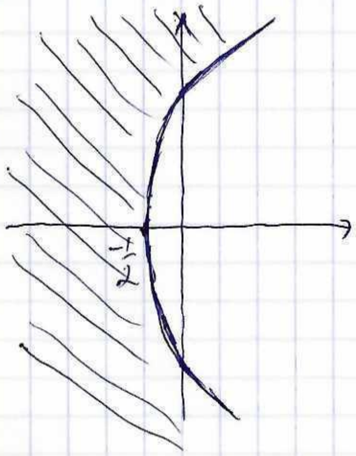
$\Rightarrow$ Граница этой области — парабола с директрисой $x=-2$ и фокусом в т. 1.

$F(1;0)$ — фокус; $x = -2$ — директриса

Вершина параболы лежит на оси Ox, на равном расстоянии от фокуса и директрисы $\Rightarrow A(-\frac{1}{2}; 0)$ — вершина.

Параметр параболы: $p = 3$ (расстояние от фокуса до директрисы) $\Rightarrow y^2 = 2 \cdot 3 \left(x + \frac{1}{2}\right)$ — уравнение такой параболы.

Данное множество ~~находится~~ находится левее параболы (с границей).



Искомое уравнение параболы может быть получено другим способом:

$|z-1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$

$2 + \operatorname{Re} z = 2 + x$

$\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2 + x$

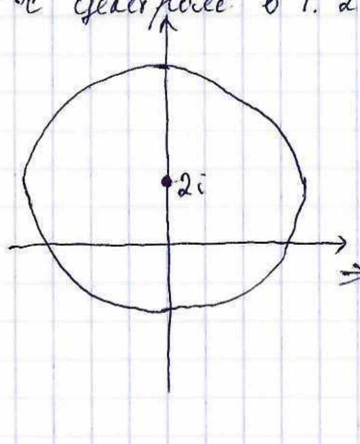
$(x^2 - 2x + 1) + y^2 = x^2 + 4x + 4$

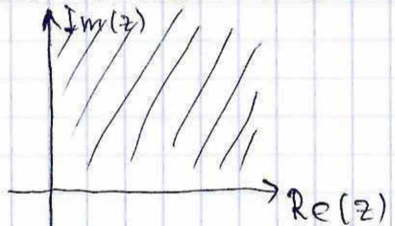
$\Rightarrow \underline{y^2 = 6x + 3}$ — парабола с параметром 3 и вершиной $A(-\frac{1}{2}; 0)$.

(26) $\begin{cases} |z - 2i| \leq 4 \\ 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

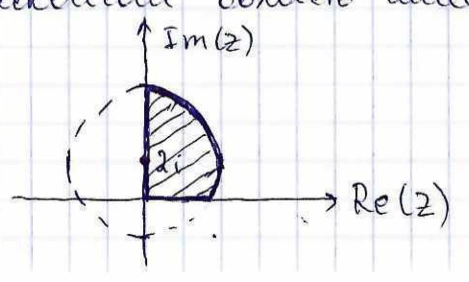
Решение: 1) $|z-2i| = 4$ — круг радиуса 4 с центром в т. $2i$

2) $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$ — первый квадрант комплексной плоскости





$\Rightarrow$ искомая область имеет вид:



Комплексные числа в тригонометрической форме

С помощью модуля и аргумента комплексное число можно представить в тригонометрической форме:

$$z = x + iy = \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{|z|}\left(\underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\cos\varphi} + i\underbrace{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\sin\varphi}\right) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Задача 27. Представить в тригонометрической форме следующие числа:

а) $-i$; б) $1 - i\sqrt{3}$; в) $\frac{2}{\sqrt{3}-i}$ г) $\frac{-4+8i}{3-i}$

Решение: а) $|-i| = 1 \Rightarrow$

$$-i = 1\left(\underbrace{0}_{\cos\varphi} + i\cdot\underbrace{(-1)}_{\sin\varphi}\right)$$

$$\left.\begin{matrix}\cos\varphi = 0\\ \sin\varphi = -1\end{matrix}\right\} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow -i = 1\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

б) $|1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$$1 - i\sqrt{3} = 2\left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{\cos\varphi} - \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\sin\varphi}i\right)$$

$$\left.\begin{matrix}\cos\varphi = \frac{1}{2}\\ \sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow 1 - i\sqrt{3} = 2\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

в) Чтобы число $\frac{2}{\sqrt{3}-i}$ представить в тригонометрической форме, его сначала нужно привести к виду $x + iy$:

$$\frac{2}{\sqrt{3}-i}\cdot\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{2\sqrt{3}+2i}{(\sqrt{3})^2+1} = \frac{2\sqrt{3}+2i}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 1\cdot\left(\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\cos\varphi} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\sin\varphi}i\right)$$

$$\left.\begin{matrix}\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\varphi = \frac{1}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$$

г) Представим число $\frac{-4+8i}{3-i}$ в виде $x + iy$:

$$\frac{-4+8i}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i} = \frac{(-4+8i)(3+i)}{3^2+1^2} = \frac{-12-4i+24i+8i^2}{4} = \frac{-20+20i}{4} = -5+5i$$

$$|-5+5i| = \sqrt{5^2+5^2} = 5\sqrt{2}.$$

$$-5+5i = 5\sqrt{2}\left(\underbrace{-\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos\varphi} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\sin\varphi}i\right) = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

$$\left.\begin{matrix}\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4}$$

Если комплексное число представлено в тригонометрической форме $|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то для возведения его в степень можно использовать формулу Муавра:

$$\left(|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Задача 28. Вычислить

а) $(1+i)^{10}$ б) $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}$

Решение: а) Представим число $1+i$ в тригонометрической форме:

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Используем формулу Муавра:

$$(1+i)^{10} = (\sqrt{2})^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}\right) = 32\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}\right) =$$

$$= 32\left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} + i\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}\right) = 32(0 + 1\cdot i) = 32i$$

б) Представим числа $1+i$, $1-i\sqrt{3}$ в тригонометр. форме:

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right); \quad 1-i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Используем формулу Муавра:

$$(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8\left(\underbrace{\cos\frac{8\pi}{4}}_{=1} + i\underbrace{\sin\frac{8\pi}{4}}_{=0}\right) = 2^4 = 16.$$

$$(1-i\sqrt{3})^{-6} = (2)^{-6}\left(\underbrace{\cos\left(\frac{-6\pi}{-3}\right)}_{=1} + i\underbrace{\sin\left(\frac{-6\pi}{-3}\right)}_{=0}\right) = \frac{1}{64}$$

$$\Rightarrow (1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6} = 16\cdot\frac{1}{64} = \frac{1}{4}. \quad \blacksquare$$

Задача 29. Вычислить 2017-ю степень комплексного числа $z = \dfrac{-(5/2) + (i/2)}{\sqrt{2} - (3/\sqrt{2})i}$

Решение: Сначала представим число z в тригонометрической форме. Для этого его сначала нужно представить в виде $x+iy$:

$$z = \frac{-(5/2) + (i/2)}{\sqrt{2} - (3/\sqrt{2})i}\cdot\frac{\sqrt{2} + 3/\sqrt{2}\, i}{\sqrt{2} + 3/\sqrt{2}\, i} = \frac{-\frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{15}{2\sqrt{2}}i + \frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{3}{2\sqrt{2}}}{2 + 3/2}\cdot\frac{4}{4} =$$

$$= \frac{-10\sqrt{2} - 15\sqrt{2}i + 2\sqrt{2}i - 3\sqrt{2}}{8+18} = \frac{-13\sqrt{2} - 13\sqrt{2}i}{26} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$$

Используем формулу Муавра:

$$z^{2017} = \cos\left(\frac{5\cdot 2017\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\cdot 2017\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{5\cdot 2016}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{5\cdot 2016}{4}\pi\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$. $\blacksquare$

Корень n-ой степени (число n — натуральное) из комплексного числа z имеет ровно n значений, которые вычисляются по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right), \quad k=0,1,\dots,n-1.$$

Здесь предполагается, что число z задано в тригонометрической форме:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Если $|z|=1$, то все корни n-ой степени $\sqrt[n]{z}$ с операцией умножения образуют циклическую группу порядка n.

<u>Задача 29.</u> Вычислить все значения корней из комплексных чисел:

а) $\sqrt[4]{-1}$; б) $\sqrt[4]{2\sqrt{3}+2i}$

<u>Решение:</u> а) Представим число -1 в тригонометрической форме: $-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$, $n=4$.

<u>$k=0$:</u> $(\sqrt[4]{-1})_0 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

<u>$k=1$:</u> $(\sqrt[4]{-1})_1 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

<u>$k=2$:</u> $(\sqrt[4]{-1})_2 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

<u>$k=3$:</u> $(\sqrt[4]{-1})_3 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi+6\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+6\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

б) Представим число $2\sqrt{3}+2i$ в тригонометрической форме: $2\sqrt{3}+2i = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

<u>$k=0$:</u> $(\sqrt[4]{\cdot})_0 = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi/6}{4} + i\sin\frac{\pi/6}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}\right)$

<u>$k=1$:</u> $(\sqrt[4]{\cdot})_1 = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi/6+2\pi}{4} + i\sin\frac{\pi/6+2\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{24} + i\sin\frac{13\pi}{24}\right)$

<u>$k=2$:</u> $(\sqrt[4]{\cdot})_2 = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi/6+4\pi}{4} + i\sin\frac{\pi/6+4\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{25\pi}{24} + i\sin\frac{25\pi}{24}\right)$

<u>$k=3$:</u> $(\sqrt[4]{\cdot})_3 = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi/6+6\pi}{4} + i\sin\frac{\pi/6+6\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{37\pi}{24} + i\sin\frac{37\pi}{24}\right).$

<u>Задача 30.</u> Найти все корни 3-й степени из комплексного числа $z = \frac{-6-13i}{13-6i}$

<u>Решение:</u> Для этого надо сначала представить число в виде $x+iy$, а потом — в тригонометрической форме.

$$z = \frac{-6-13i}{13-6i}\cdot\frac{13+6i}{13+6i} = \frac{\cancel{-78}-36i-169i+\cancel{78}}{169+36} = \frac{-36-169}{36+169}\cdot i = -i$$

Число в тригонометрической форме: $-i = 1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

Извлекаем корни третьей степени:

<u>$k=0$:</u> $\sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{-\pi/2}{3} + i\sin\frac{-\pi/2}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

<u>$k=1$:</u> $\sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{-\pi/2+2\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi/2+2\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

<u>$k=2$:</u> $\sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{-\pi/2+4\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi/2+4\pi}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

§ 3. Расширение поля рациональных чисел

Расширение поля K – поле E, содержащее поле K в качестве подполя.

Например, $\mathbb{C}$ (множество комплексных чисел с операциями $+$ и $\cdot$) – расширение поля $\mathbb{R}$.

Чтобы построить расширение поля, достаточно добавить к полю корень многочлена (который не имеет корней в данном поле) и взять замыкание.

Например, если добавить к $\mathbb{Q}$ корень многочлена $x^2-2=0$ и взять замыкание, можно получить все числа вида $x+y\sqrt{2}$ – расширение поля $\mathbb{Q}$. Оно обозначается $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Задача 31. Найти в $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ элемент, обратный к $1+3\sqrt{3}$.

Решение:
$$\frac{1}{1+3\sqrt{3}} = \frac{1}{1+3\sqrt{3}}\cdot\frac{1-3\sqrt{3}}{1-3\sqrt{3}} = \frac{1-3\sqrt{3}}{1-27} = -\frac{1}{26}+\frac{3}{26}\sqrt{3}.$$

Расширение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ являются числа вида $x+y\sqrt[3]{2}+z\sqrt[3]{4}$, где $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Задача 32. В поле $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ найти элемент, обратный к $1-\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}$ и представить его в виде $x+y\sqrt[3]{2}+z\sqrt[3]{2}$.

Решение: Будем использовать метод неопределенных коэффициентов. Пусть искомый элемент запишем в виде $x+y\sqrt[3]{2}+z\sqrt[3]{4}$. Он является взаимно обратным с $1-\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}$, то есть
$$(x+y\sqrt[3]{2}+z\sqrt[3]{4})(1-\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}) = 1$$

Раскроем скобки в левой части выражения:
$$(x+y\sqrt[3]{2}+z\sqrt[3]{4})(1-\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}) = x+y\sqrt[3]{2}+z\sqrt[3]{4}-x\sqrt[3]{2}-y\sqrt[3]{4}-2z+$$
$$+2x\sqrt[3]{4}+4y+4z\sqrt[3]{2} = (x+4y-2z)+(y-x+4z)\sqrt[3]{2}+(2x-y+4z)\sqrt[3]{4}.$$

Таким образом, $(x+4y-2z)+(-x+y+4z)\sqrt[3]{2}+(2x-y+z)\sqrt[3]{4} =$
$$= 1+0\cdot\sqrt[3]{2}+0\cdot\sqrt[3]{4}$$

Приравниваем слагаемые в левой и правой частях:

Коэф. перед 1:
Коэф. перед $\sqrt[3]{2}$:
Коэф. перед $\sqrt[3]{4}$:
$$\begin{cases} x+4y-2z=1 \\ -x+y+4z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$$

Решим систему методом Крамера:
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 43; \quad \Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$
$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9; \quad \Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{5}{43}, \quad y = \frac{9}{43}, \quad z = -\frac{1}{43}$$

$$\Rightarrow (1-\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4})^{-1} = \frac{5}{43}+\frac{9}{43}\cdot\sqrt[3]{2}-\frac{1}{43}\cdot\sqrt[3]{4}.$$

Аналогично расширением поля рациональных чисел $Q(\sqrt[3]{5})$ являются числа вида $x+y\sqrt[3]{5}+z\sqrt[3]{25}$, где $x, y, z \in Q$.

Задача 33. Найти в поле $Q(\sqrt[3]{5})$ число, обратное числу $a = 2+3\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{25}$ и представить его в виде $x+y\sqrt[3]{5}+z\sqrt[3]{25}$.

Решение: Пусть $x+y\sqrt[3]{5}+z\sqrt[3]{25}$ — число, обратное к $2+3\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{25}$, т.е.

$$(x+y\sqrt[3]{5}+z\sqrt[3]{25})(2+3\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{25}) = 1$$

Раскроем скобки в левой части выражения:

$$(x+y\sqrt[3]{5}+z\sqrt[3]{25})(2+3\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{25}) =$$
$$= 2x+2\sqrt[3]{5}\,y+2\sqrt[3]{25}\,z+3\sqrt[3]{5}\,x+3\sqrt[3]{25}\,y+15z -$$
$$- \sqrt[3]{25}\,x - 5y - 5\sqrt[3]{5}\,z = 1+0\cdot\sqrt[3]{5}+0\cdot\sqrt[3]{25}$$

Приравняем коэффициенты перед $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{25}$, 1 в левой и правой части, получим систему линейных уравнений:

$$\begin{array}{r} 1: \\ \sqrt[3]{5}: \\ \sqrt[3]{25}: \end{array} \begin{cases} 2x-5y+15z=1 \\ 3x+2y-5z=0 \\ -x+3y+2z=0 \end{cases}$$

Решим систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 15 \\ 3 & 2 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 208; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 15 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 19;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 15 \\ 3 & 0 & -5 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 11$$

Имеем: $x = \frac{19}{208}$; $y = -\frac{1}{208}$; $z = \frac{11}{208}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad a^{-1} = \frac{1}{208}(19 - \sqrt[3]{5} + 11\sqrt[3]{25}$$

§4. Алгебра многочленов

Многочленом с коэффициентами в поле K наз. выражение вида:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Множество многочленов степени $\leq n$ образует алгебру над полем K.

Многочлен $f(x)$ наз. неприводимым над полем K, если он не является константой и не представим в виде $f(x) = q(x)\, r(x)$, где $q(x)$, $r(x)$ — многочлены над полем K, отличные от констант.

Над полем $\mathbb{R}$ неприводимыми являются многочлены вида $x + a$ и $x^2 + px + q$ (если $D < 0$) и только они.

Над полем $\mathbb{C}$ неприводимыми являются многочлены вида $x + a$ и только они.

В алгебре многочленов можно находить НОД многочленов с помощью алгоритма Евклида.

Основной задачей, которой мы будем заниматься, является разложение многочлена на неприводимые над различными полями.

Задача 34. Разложить многочлен $x^4 + 16$ на неприводимые над полем $\mathbb{R}$; над полем $\mathbb{C}$.

Решение: Разложим сначала многочлен над полем $\mathbb{C}$. Можно при этом действовать следующим образом: многочлен $x - a$ является множителем $x^4 + 16$, если a является комплексным корнем уравнения $x^4 + 16 = 0$.

$$\Rightarrow x = \sqrt[4]{-16}$$

Найдем все комплексные корни -16:

$$-16 = 16 (\cos \pi + i \sin \pi)$$

$k=0$: $\left(\sqrt[4]{-16}\right)_0 = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$k=1$: $\left(\sqrt[4]{-16}\right)_1 = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$k=2$: $\left(\sqrt[4]{-16}\right)_2 = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

$k=3$: $\left(\sqrt[4]{-16}\right)_3 = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi+6\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+6\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

Получим следующее разложение над полем $\mathbb{C}$:

$$x^4 + 16 = (x - \sqrt{2} - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2} - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2} + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2} + \sqrt{2}i)$$

Чтобы найти разложение над $\mathbb{R}$, сгруппируем комплексно-сопряженные пары корней:

1) $x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $x_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

2) $x_3 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $x_4 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$.

Рассмотрим первую пару: 1) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i = x_1$
$\sqrt{2} - \sqrt{2}i = x_2$

Произведение $x_1 \cdot x_2 = (\sqrt{2} + \sqrt{2}i)(\sqrt{2} - \sqrt{2}i) = 4$
Сумма $x_1 + x_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i + \sqrt{2} - \sqrt{2}i = 2\sqrt{2}$

По теореме Виета многочлен, корнями которого являются числа x_1, x_2 вычисляется по формуле:
$$p(x) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2$$

В нашем случае получим $p(x) = x^2 - 2\sqrt{2}x + 4$

Аналогично рассмотрим вторую пару: 2) $x_3 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$
$x_4 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

Произведение $x_3 \cdot x_4 = (-\sqrt{2} + \sqrt{2}i)(-\sqrt{2} - \sqrt{2}i) = 4$
Сумма $x_3 + x_4 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i - \sqrt{2} - \sqrt{2}i = -2\sqrt{2}$

Получим $r(x) = x^2 + 2\sqrt{2}x + 4$

Таким образом, разложение над полем $\mathbb{R}$ имеет вид:
$$x^4 + 16 = (x^2 - 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 + 2\sqrt{2}x + 4). \blacksquare$$

Задача 35. Разложить многочлен $f(x) = x^3 + 7x^2 + 16x + 10$ на неприводимые над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

Решение: Подбором можно найти действительный корень многочлена: $x_0 = -1$.

Делим многочлен $x^3 + 7x^2 + 16x + 10$ на $x + 1$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 7x^2 + 16x + 10 & x + 1 \\ \underline{x^3 + x^2} & \overline{x^2 + 6x + 10} \\ 6x^2 + 16x & \\ \underline{6x^2 + 6x} & \\ 10x + 10 & \\ \underline{10x + 10} & \\ 0 & \end{array}$$

Квадратный трёхчлен $x^2 + 6x + 10$ не имеет действительных корней.

Значит, разложение над полем $\mathbb{R}$ имеет вид:
$$f(x) = (x+1)(x^2 + 6x + 10)$$

Найдем комплексные корни многочлена $x^2 + 6x + 10$:
$$x^2 + 6x + 10 = (x^2 + 6x + 9) + 1 = (x+3)^2 + 1 = 0$$
$$\Rightarrow (x+3)^2 = -1$$
$$\Rightarrow x + 3 = \pm i$$
$$\Rightarrow x = -3 \pm i$$

Значит, разложение над полем $\mathbb{C}$ имеет вид:
$$f(x) = (x+1)(x+3+i)(x+3-i) \blacksquare$$

Задача 36. Разложить многочлен

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + x - 3$$

над полем $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

Решение: Применим группировку

$$f(x) = x^4(x-3) + 1(x-3) = (x-3)(x^4+1)$$

Разложить многочлен x^4+1 на неприводимые можно аналогично задаче 34. ∎

$\boxed{\text{Домашнее задание}}$

1. Вычислить 716-ю степень элемента $a=3$ в $\mathbb{Z}_8^*$; $\mathbb{Z}_{11}^*$.
2. Вычислить 238-ю степень элемента $a=7$ в $\mathbb{Z}_{19}^*$.
3. Решить систему линейных уравнений:
$$\begin{cases} 7x + 8y + z = 10 \\ 2x + 5y + 12z = 12 \\ 6x + y + 2z = 10 \end{cases}$$ над полем $\mathbb{Z}_{13}$.
4. Решить систему уравнений в поле вычетов по модулю 7:
$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 1 \\ 3x + 2y + 6z = 2 \\ 4x + y + 4z = 3 \end{cases}$$
5. Найти элемент, обратный к $a=24$ в поле вычетов $\mathbb{Z}_{113}$.
6. В поле вычетов $\mathbb{Z}_{97}$ найти элемент, обратный к $a=50$.
7. На комплексной плоскости изобразить множество точек, удовлетворяющих неравенству:
$$|z-2| + |z+2| \leq 6$$
Какая кривая является границей этой области?
8. На комплексной плоскости изобразить множество точек, удовлетворяющих неравенству:
$$|z+3i| < 1 + \operatorname{Im} z$$
Какая кривая служит границей этой области?
9. Вычислить 523-ю степень комплексного числа $z = \dfrac{2+3i}{3-2i}$
10. Найти все корни 4-й степени из комплексного числа $z = \dfrac{2}{-1+\sqrt{3}i}$
11. В поле $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ найти элемент, обратный к $a = 2 + \sqrt[3]{3} - 4\sqrt[3]{9}$.
12. Разложить многочлен $f(x) = x^4 - 2x^3 + 8x - 16$ на неприводимые над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.
13. Разложить многочлен $f(x) = x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1$ на неприводимые над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.