Семинар 15-16. Понятие группы. Группы диэдра. Таблицы Кэли. Решетка подгрупп

Группой называется множество M с заданной на нем бинарной операцией $\times\colon M\times M\to M$, которая удовлетворяет соотношениям:
1) $x\times(y\times z)=(x\times y)\times z$ (ассоциативность),
2) $\exists e\in M\colon x\times e=e\times x=x$ (существует нейтральный элемент),
3) $\forall\exists x^{-1}\colon x\times x^{-1}=x^{-1}\times x=e$ (существует обратный элемент).

Если операция на множестве M операция $\times$ удовлетворяет только свойству 1, такую алгебраическую структуру называют *полугруппой*, свойствам 1,2 — *моноидом.*

Если операцию в группе ассоциируют со сложением, группу называют *аддитивной*, операцию обозначают $+$, нейтральный элемент 0. Если операцию в группе ассоциируют с умножением, группу называют *мультипликативной*, операцию обозначают $\cdot$, нейтральный элемент 1.

Группа называется *абелевой*, если операция коммутативна, т.е. $x\times y=y\times x$.

Задача 1. Выяснить, образуют ли группу следующие множества при указанных операциях над ними.

1. Целые числа относительно сложения (абелева группа),
2. Четные числа относительно сложения (абелева группа),
3. Степени данного действительного числа a, $a\neq 0$, $a\neq\pm1$, относительно умножения (абелева группа),
4. Неотрицательные целые числа относительно сложения (моноид),
5. Целые числа относительно вычитания (даже не полугруппа),
6. Рациональные числа относительно умножения (моноид),
7. Рациональные числа, отличные от нуля, относительно умножения (абелева группа),
8. Свободные векторы пространства V_3, относительно сложения (абелева группа),
9. Невырожденные аффинные преобразования пространства относительно операции композиции (последовательного выполнения) (группа, но не абелева),
10. Действительные многочлены степени n (включая 0) от неизвестного x относительно сложения (абелева группа).

Конечные группы

Группа называется *конечной*, если она содержит конечное число элементов. Число элементов группы называется *порядком группы.* Для конечной группы возможно описание с помощью так называемой *таблицы Кэли.* Элементами этой таблицы являются элементы, полученные умножением элемента строки и элемента столбца. Если эта таблица симметрична, то группа абелева. В каждой строке и каждом столбце каждый элемент группы должен встречаться только один раз.

Задача 2. Составить все группы порядков 2,3,4 с точностью до изоморфизма[1].

[1]Группы изоморфны, если имеют одинаковую структуру с точностью до переобозначения. Это, конечно, не строгое определение, но на данном этапе этого достаточно.

Решение: Начнем с группы порядка 2. Она содержит два элемента, один из которых должен быть нейтральным (обозначим его e). Элементы группы: a, e. Тогда единственно возможный вариант таблицы Кэли имеет вид

$\times$	e	a
e	e	a
a	a	e

Получили группу, которая изоморфна *группе вычетов* порядка 2. Такая группа состоит из остатков от деления на 2 (0 и 1) относительно сложения. Ее обозначают $\mathbb{Z}_2$.

Группа порядка 3 содержит 3 элемента, обозначим их e, a, b. Первая строка и первый столбец таблицы Кэли заполняется тривиально:

$\times$	e	a	b
e	e	a	b
a	a		
b	b		

Рассмотрим элемент $*$:

$\times$	e	a	b
e	e	a	b
a	a		$*$
b	b		

Этот элемент не равен a, поскольку в строке уже встречается a, и не равен b, поскольку в столбце уже встречается b. Значит, он равен e. Заполняем таблицу до конца:

$\times$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Такая группа изоморфна группе вычетов $\mathbb{Z}_3$ порядка 3.

Группа порядка 4 содержит 4 элемента: e, a, b, c. Заполним первую строку и первый столбец таблицы Кэли:

$\times$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a			
b	b			
c	c			

Рассмотрим элемент $*$:

$\times$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a		$*$	
b	b			
c	c			

Существуют два варианта выбора этого элемента: 1) e , 2) c. Рассмотрим их.

Вариант 1. $* = e$. Заполним оставшуюся часть таблицы:

$\times$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	c	e	b
b	b	e	c	a
c	c	b	a	e

Эта группа изоморфна $\mathbb{Z}_4$, группе вычетов 4 порядка, если переобозначить $e = 0$, $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$.

Вариант 2. $* = c$. Получим:

$\times$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a		c	
b	b			
c	c			

Теперь рассмотрим элемент $\bullet$:

$\times$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a		c	
b	b		$\bullet$	
c	c			

Если $\bullet = e$, то заполненная таблица Кэли имеет вид

$\times$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

но эта группа изоморфна $\mathbb{Z}_4$, при переобозначении $e = 0$, $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, или

$\times$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	e	e

Эта группа не изоморфна $\mathbb{Z}_4$. Она называется *четверной группой Клейна* и обозначается V_4.

Если $\bullet = a$, то заполненная таблица Кэли имеет вид

$\times$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

Однако эта группа опять изоморфна $\mathbb{Z}_4$, при переобозначении $e = 0$, $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$, или при $e = 0$, $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$.

Таким образом, существуют всего 2 группы четвертого порядка: 1) $\mathbb{Z}_4$, 2) четверная группа Клейна.

Также группы вычетов $\mathbb{Z}_n$ можно ассоциировать с группами C_n вращений правильного n-угольника, с операцией композиции вращений.

Можно определить степень элемента группы. Например, для положительных k $a^k = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (k раз). Также будем считать, что $a^0 = e$, а a^{-k} — элемент, обратный к a^k.

Отображение $\varphi\colon M \to N$ из группы $(M, \cdot)$ в группу $(N, \times)$ называется *гомоморфизмом*, если оно сохраняет операцию в группах, то есть $\varphi(x) \times \varphi(y) = \varphi(x \cdot y)$.

Рассмотрим пару теоретических задач.

Задача 3. Для каких групп G отображение $f\colon G \to G$, определенное правилом $f(x) = x^2$, будет гомоморфизмом?

Решение: Рассмотрим левую и правую части равенства $\varphi(x) \times \varphi(y) = \varphi(x \cdot y)$ в данном случае:

$$f(x) \cdot f(y) = x^2 y^2 = xxyy,$$
$$f(x \cdot y) = (x \cdot y)^2 = xyxy.$$

Сравнив выражения $xxyy$ и $xyxy$, получаем $xy = yx$.

Ответ: Для абелевых групп.

Задача 4. Доказать, что если $a^2 = e$ для любого элемента a группы G, то эта группа абелева.

Решение: Докажем коммутативность операции $\cdot$ группы:

$$a \cdot b = b \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot a = b \cdot (b \cdot a)^2 \cdot a = b \cdot a.$$

Коммутативность доказана.

Порождающие элементы

Пусть группа состоит только из степеней некоторого элемента g (как положительных, так и отрицательных). Такие группы называют *циклическими*, а элемент g — порождающим элементом группы. Есть два разных случая:
1) Все степени различны. Тогда получаем бесконечную циклическую группу. Любая бесконечная циклическая группа изоморфна $\mathbb{Z}$, то есть группе целых чисел с операцией сложения.
2) Существуют $k \neq l$, такие, что $g^k = g^l$. Если $k > l$, то $g^{k-l} = e$. Эта группа конечна. Любая конечная циклическая группа изоморфна $\mathbb{Z}_n$, то есть группе вычетов n-го порядка, или C_n, группе вращений правильного n-угольника.

Наименьшее из натуральных чисел m такое, что $a^m = e$, называется *порядком* элемента e группы. Порядок порождающего элемента циклической группы равен порядку группы. В конечной группе порядок элемента группы делит порядок группы.

Задача 5. Вычислить порядки всех элементов в $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$, определить порождающие элементы этих групп.

Ответ: 1) В $\mathbb{Z}_2$: $\mathrm{ord}(0) = 1$, $\mathrm{ord}(1) = 2$. 1 — порождающий элемент.

2) В $\mathbb{Z}_3$: $\mathrm{ord}(0) = 1$, $\mathrm{ord}(1) = 3$, $\mathrm{ord}(2) = 3$, 1 и 2 — порождающие элементы.

3) В $\mathbb{Z}_4$: $\mathrm{ord}(0) = 1$, $\mathrm{ord}(1) = 4$, $\mathrm{ord}(2) = 2$, $\mathrm{ord}(3) = 3$, 1 и 3 — порождающие элементы.

Группы диэдра

Группой диэдра D_n называется группа преобразований правильного n-угольника, переводящих правильный n-угольник в себя, с операцией композиции преобразований. Есть два вида таких преобразований:
1) n вращений относительно центра правильного n-угольника, на угол, кратный $\frac{360^\circ}{n}$.
2) n симметрий относительно осей симметрии правильного n-угольника.

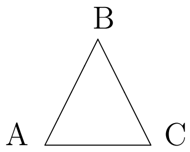
Порядок группы диэдра D_n равен $2n$.

Подмножество элементов группы называется *подгруппой*, если оно замкнуто относительно операции группы и само по себе является группой. Например, группа вращений C_n правильного n-угольника является подгруппой группы диэдра D_n.

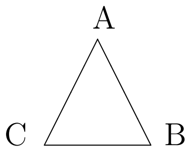
Задача 6. Построить таблицу Кэли группы диэдра D_3, выписать все подгруппы.

Решение: Изобразим сначала все повороты:

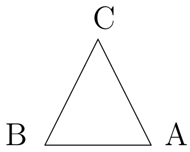
R_0:



R_{120}:



R_{240}:

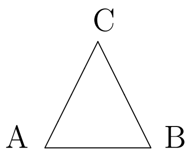


Здесь

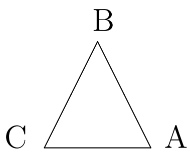
- R_0 — поворот на $0°$, то есть тождественное преобразование (нейтральный элемент группы),
- R_{120} — поворот на $120°$,
- R_{240} — поворот на $240°$.

А потом все симметрии:

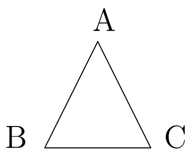
L_A:



L_B:



L_C:



Здесь

- L_A — симметрия относительно оси, проходящей через точку A и середину BC,
- L_B — симметрия относительно оси, проходящей через точку B и середину AC,
- L_C — симметрия относительно оси, проходящей через точку C и середину AB.

Составим таблицу Кэли этой группы:

	R_0	R_{120}	R_{240}	L_A	L_B	L_C
R_0	R_0	R_{120}	R_{240}	L_A	L_B	L_C
R_{120}	R_{120}	R_{240}	R_0	L_C	L_A	L_B
R_{240}	R_{240}	R_0	R_{120}	L_B	L_C	L_A
L_A	L_A	L_B	L_C	R_0	R_{120}	R_{240}
L_B	L_B	L_C	L_A	R_{240}	R_0	R_{120}
L_C	L_C	L_A	L_B	R_{120}	R_{240}	R_0

Группа имеет три подгруппы:
1) $\{R_0\}$ (тривиальная подгруппа),
2) $\{R_0, R_{120}, R_{240}\}$,
3) D_3.

Множество симметрий не образует подгруппу (в результате композиции двух симметрий получается поворот).

Вычислим порядки элементов группы:

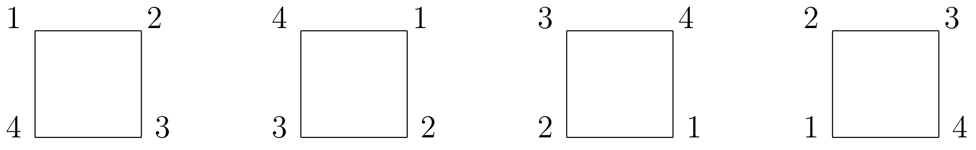
$$\mathrm{ord}(R_0) = 1, \quad \mathrm{ord}(R_{120}) = 3, \quad \mathrm{ord}(R_{240}) = 3,$$

$$\mathrm{ord}(L_A) = 2, \quad \mathrm{ord}(L_B) = 2, \quad \mathrm{ord}(L_C) = 2.$$

Видно, что в этой группе нет элемента порядка 6, а потому группа не является циклической. В качестве системы порождающих элементов можно выбрать R_{120} (или R_{240}) и любую симметрию[2].

Задача 7. Построить таблицу Кэли группы диэдра D_4, выписать все подгруппы.
Решение: Изобразим сначала все повороты:

R_0: R_{90}: R_{180}: R_{270}:

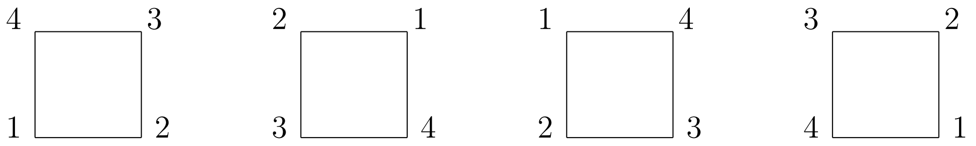


Здесь

- R_0 — поворот на $0°$, то есть тождественное преобразование (нейтральный элемент группы),
- R_{90} — поворот на $90°$,
- R_{180} — поворот на $180°$,
- R_{270} — поворот на $270°$

А потом все симметрии:

H: V: D: D':



Здесь

- H — симметрия относительно горизонтальной оси,
- V — симметрия относительно вертикальной оси,
- D — симметрия относительно диагональной оси (по главной диагонали),
- D' — симметрия относительно диагональной оси (по побочной диагонали).

Составим таблицу Кэли этой группы:

	R_0	R_{90}	R_{180}	R_{270}	H	V	D	D'
R_0	R_0	R_{90}	R_{180}	R_{270}	H	V	D	D'
R_{90}	R_{90}	R_{180}	R_{270}	R_0	D'	D	H	V
R_{180}	R_{180}	R_{270}	R_0	R_{90}	V	H	D'	D
R_{270}	R_{270}	R_0	R_{90}	R_{180}	D	D'	V	H
H	H	D	V	D'	R_0	R_{180}	R_{90}	R_{270}
V	V	D'	H	D	R_{180}	R_0	R_{270}	R_{90}
D	D	V	D'	H	R_{270}	R_{90}	R_0	R_{180}
D'	D'	H	D	V	R_{90}	R_{270}	R_{180}	R_0

[2]Если элементы R_{120} и L_A порождают группу, это означает, что любой элемент группы может быть представлен в виде $R_{120}^k L_A^m$ или $L_A^m R_{120}^k$.

Подгруппы в D_4:
1) $\{R_0\}$,
2) $\{R_0, R_{180}\}$,
3) $\{R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}\}$,
4) $\{R_0, H\}$, $\{R_0, V\}$, $\{R_0, D\}$, $\{R_0, D'\}$,
5) $\{R_0, R_{180}, H, V\}$, $\{R_0, R_{180}, D, D'\}$,
6) D_4.

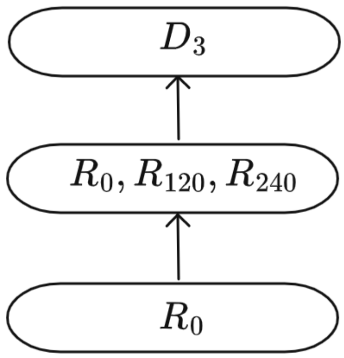
Систему порождающих образует поворот R_{90} (или R_{270}) и любая симметрия.

Решетка подгрупп

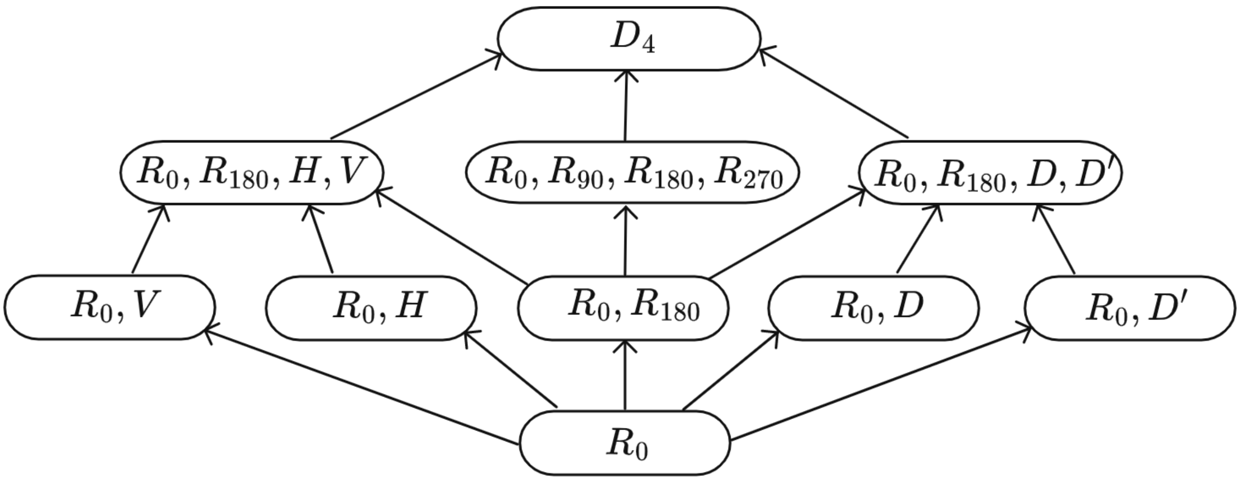
Решеткой подгрупп называется множество всех подгрупп, упорядоченное по включению.

Задача 8. Построить решетку подгрупп групп диэдра D_3, D_4.

Решение: Группа D_3 имеет только 3 подгруппы, которые можно упорядочить по включению следующим образом:



Для группы D_4 решетка подгрупп имеет вид:



Построение решетки подгрупп в общем случае — довольно сложная задача, но для циклических групп она упрощается.

Задача 9. Построить решетку подгрупп группы вращений правильного шестиугольника.

Решение: Эта группа состоит из шести элементов:

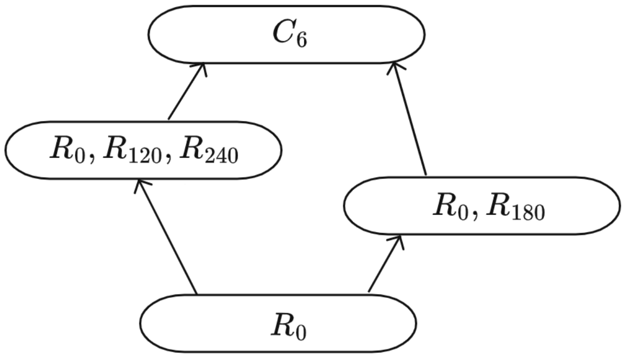
$$\{R_0, R_{60}, R_{120}, R_{180}, R_{240}, R_{300}\}.$$

Найдем порядки элементов

$$\mathrm{ord}(R_0) = 1, \quad \mathrm{ord}(R_{60}) = 6, \quad \mathrm{ord}(R_{120}) = 3,$$
$$\mathrm{ord}(R_{180}) = 2, \quad \mathrm{ord}(R_{240}) = 3, \quad \mathrm{ord}(R_{300}) = 5.$$

По теореме Лагранжа порядок подгруппы делится на порядок группы. Поэтому группа C_6 имеет следующие подгруппы:
1) $\{R_0\}$ (для элементов порядка 1),
2) $\{R_0, R_{180}\}$ (для элементов порядка 2 и их делителей),
3) $\{R_0, R_{120}, R_{240}\}$ (для элементов порядка 3 и их делителей),
4) C_6 (для элементов порядка 6 и их делителей).

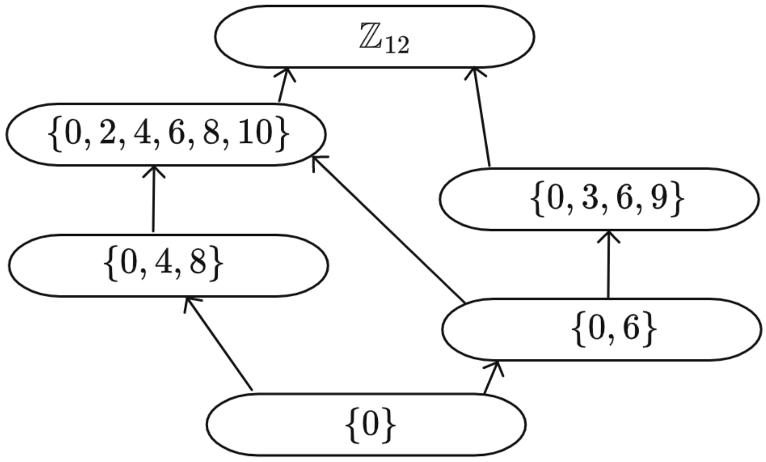
Таким образом, решетка подгрупп имеет вид



Задача 10. Построить решетку подгрупп циклической группы $\mathbb{Z}_{12}$.

Решение: Эта группа состоит из 12 элементов: $\{0, 1, \ldots, 11\}$. Каждую подгруппу образуют те элементы группы, которые кратны делителям числа 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Таким образом, группа $\mathbb{Z}_{12}$ имеет следующие подгруппы:
1) Кратны 1: $\{0, 1, 2, \ldots, 11\}$,
2) Кратны 2: $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$,
3) Кратны 3: $\{0, 3, 6, 9\}$,
4) Кратны 4: $\{0, 4, 8\}$,
5) Кратны 6: $\{0, 6\}$,
6) Кратны 12: $\{0\}$.

Решетка подгрупп имеет вид



Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Вычислить порядки всех элементов в $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_9$, определить порождающие элементы этих групп.

Задача 2. Вычислить порядки всех элементов в V_4, определить систему порождающих элементов.

Задача 3. Построить решетку подгрупп циклических групп $\mathbb{Z}_{18}$, $\mathbb{Z}_{20}$, $\mathbb{Z}_{24}$.