# Семинары 11-12. Кривые второго порядка.

**Эллипс.**

① Эллипс

ГМТ, суммарное расстояние от которых до двух заданных точек (фокусов) равна фиксиров. числу:

$|F_1M| + |F_2M| = 2a$

Канон. уравнение эллипса:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a \geq b > 0$ a - большая полуось, b - малая полуось

$A_1(a, 0), A_2(-a, 0), B_1(0, b), B_2(0, -b)$ - вершины эллипса

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$ - фокусное расстояние $\}\ a > b$

$F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ - фокусы

$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ - эксцентриситет эллипса

$e \to 1$ - эллипс вырождается в отрезок

$e = 0$ - окружность

$x = -\frac{a}{e}$; $x = \frac{a}{e}$ - директрисы эллипса

Эксцентриситет - отношение расст-я от произв. точки эллипса до фокуса к расстоянию до директрисы

**2.249.** Установить, что каждое из уравнений определяет эллипс, найти его центр $C$, полуоси, эксцентриситет и уравнения директрисс.

а) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$;

в) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$.

$\triangleleft$ а) $5(x-3)^2 - 45 + 9(y+1)^2 - 9 + 9 = 0$; $\quad \dfrac{(x-3)^2}{9} + \dfrac{(y+1)^2}{5} = 1$;

Каноническое уравнение: $\dfrac{(x')^2}{9} + \dfrac{(y')^2}{5} = 1, \quad x' = x - 3, \quad y' = y + 1.$

Полуоси: $a = 3,\ b = \sqrt{5}$, центр: $C(3, -1)$.

Эксцентриситет: $\varepsilon = c/a = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \dfrac{2}{3}$.

Уравнения директрисс:

$d_1:\ x' = -a/\varepsilon \Rightarrow x = -a/\varepsilon + 3 = -9/2 + 3 = -3/2$;

$d_2:\ x' = a/\varepsilon \Rightarrow x = a/\varepsilon + 3 = 15/2$.

в) $4(x-1)^2 - 4 + 3(y+2)^2 - 12 - 32 = 0$; $\quad \dfrac{(x-1)^2}{12} + \dfrac{(y+2)^2}{16} = 1$;

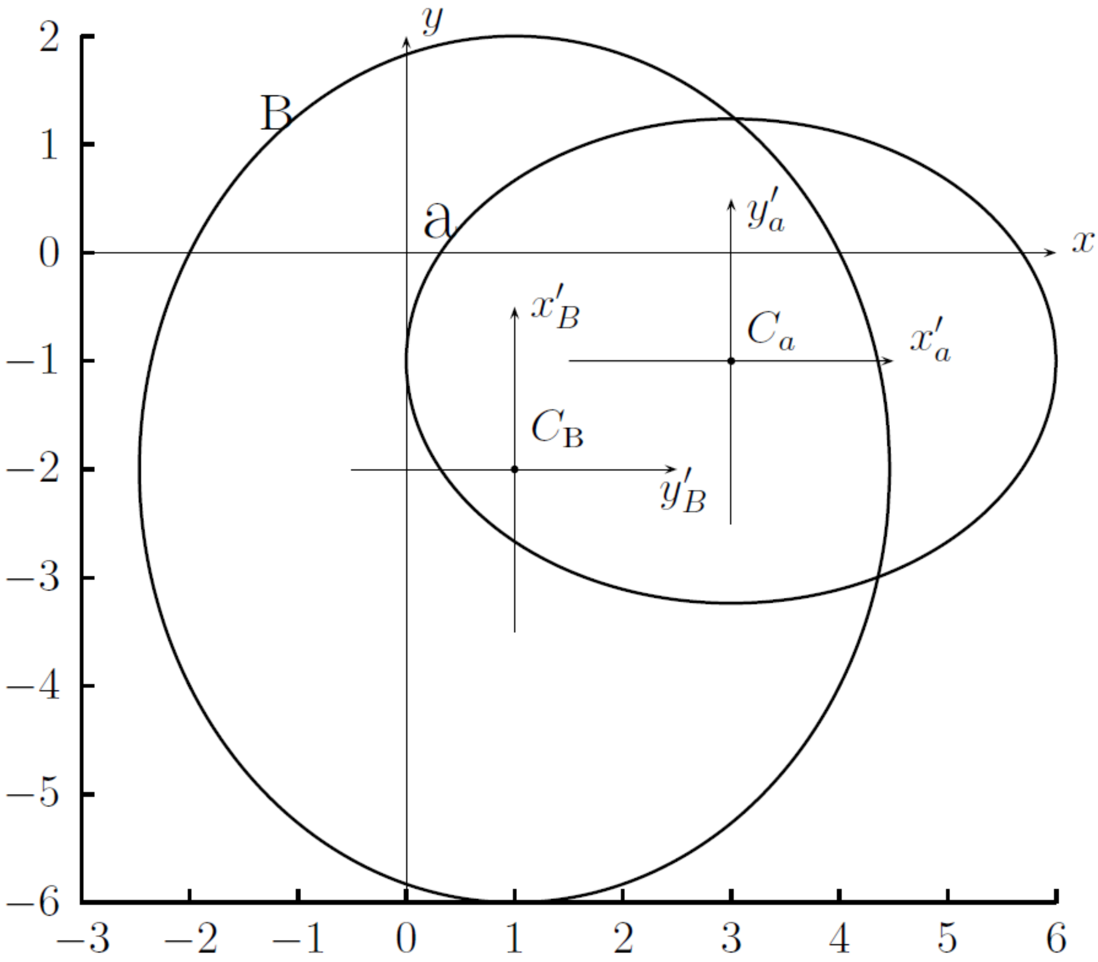
Каноническое уравнение: $\dfrac{(x')^2}{16} + \dfrac{(y')^2}{12} = 1, \quad x' = y + 2, \quad y' = x - 1.$

Полуоси:$a = 4,\ b = 2\sqrt{3}$, центр: $C(1, -2)$.

Эксцентриситет: $\varepsilon = c/a = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \dfrac{1}{2}$.

Уравнения директрисс:

$d_1 :\ x' = -a/\varepsilon \Rightarrow y = -a/\varepsilon - 2 = -8 - 2 = -10;$
$d_2 :\ x' = a/\varepsilon \Rightarrow y = a/\varepsilon - 2 = 8 - 2 = 6.$ ▷




Решим несколько задач на составление уравнения эллипсов.

**1.**

① Составить простейшее уравнение эллипса, зная что

а) расстояние между фокусами равно 6, большая полуось равна 5

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

б) большая полуось равна 10, эксцентриситет равен 0,8

$\varepsilon = c/a \Rightarrow c = 8,\ b^2 = 36 \Rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

в) сумма полуосей равна 8, расстояние между фокусами равно 8

$a + b = 8,\ 2c = 8 \Rightarrow a = 5,\ b = 3,\ c = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

**2.**

(2) Найти уравнение эллипса, если известно, что точки $A(-3\sqrt{5}-1, 4)$, $B(-1, 4-2\sqrt{5})$ являются вершинами эллипса, а точка $C(2;0)$ лежит на нем

Решение: $O(-1,4)$ − центр

$a = |-3\sqrt{5}| = 3\sqrt{5}$; $b = |-2\sqrt{5}| = 2\sqrt{5}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{45} + \frac{(y-4)^2}{20} = 1$$

**3.**

(3) Найти уравнение эллипса, если известно, что он проходит через т. $C(1 - 3\sqrt{3}/2\ ; 0)$, его большая полуось ∥-на оси $Oy$, центр находится в т. $O(1; -5/2)$, эксцентриситет $e = 4/5$.

NOTES

Решение: $e = 4/5 = c/a$

Если $a = 5k$, то $c = 4k \Rightarrow b = 3k$

Канон. уравнение эллипса

$$\frac{(x-1)^2}{9k^2} + \frac{(y+5/2)^2}{25k^2} = 1$$

Подставим т. $C$, чтобы найти $k$:

$$\frac{27}{4 \cdot 9k^2} + \frac{25}{4 \cdot 25k^2} = 1 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+5/2)^2}{25} = 1.$$

+ 4

**4.**

+ 4 Составить уравнение эллипса с фокусами $F_1(-3,8)$ и $F_2(-3,0)$ и эксцентриситетом $4/5$. Сделать рисунок.

Решение: Центр $O(-3,4)$; $2c = 8 \Rightarrow c = 4$.

$b > a$, т.к. фокусы вдоль оси $Oy$

3 NOTES $e = c/b \Rightarrow b = c/e = 5$; $a^2 = c^2 - b^2 = 9 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{25} = 1.$$

**Гипербола.**

② Гипербола

ГМТ, модуль разности расстояний от кот. до двух заданных точек равна зад. числу

$||F_1M| - |F_2M|| = 2a$

Канон. уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$

$a$, $b$ – полуоси гиперболы

$A(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ – вершины гиперболы

$Ox$ – действ. ось, $Oy$ – мнимая ось

уравнение сопряж. гиперболы: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b} = -1$, $a, b > 0$

Для такой гиперболы $Ox$ – мнимая ось, $Oy$ – действит. ось

$O$ – центр гиперболы

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ – фокусное расстояние

$y = \pm \frac{b}{a} x$ – уравнение асимптот

$F_1(-c; 0)$, $F_2(c, 0)$ – фокусы гиперболы

$e = c/a = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1$ – эксцентриситет

Директрисы гиперболы: $d: x = \pm \frac{a}{e}$

**2.269(а).** Установить, что уравнение $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$ определяет гиперболу, найти ее центр, полуоси, эксцентриситет, фокусы, уравнения асимптот и директрис.

$\triangleleft$ $16(x-2)^2 - 64 - 9(y+3)^2 + 81 - 161 = 0;\quad \frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1;$

Каноническое уравнение: $\frac{(x')^2}{9} - \frac{(y')^2}{16} = 1,\quad x' = x - 2,\quad y' = y + 3.$

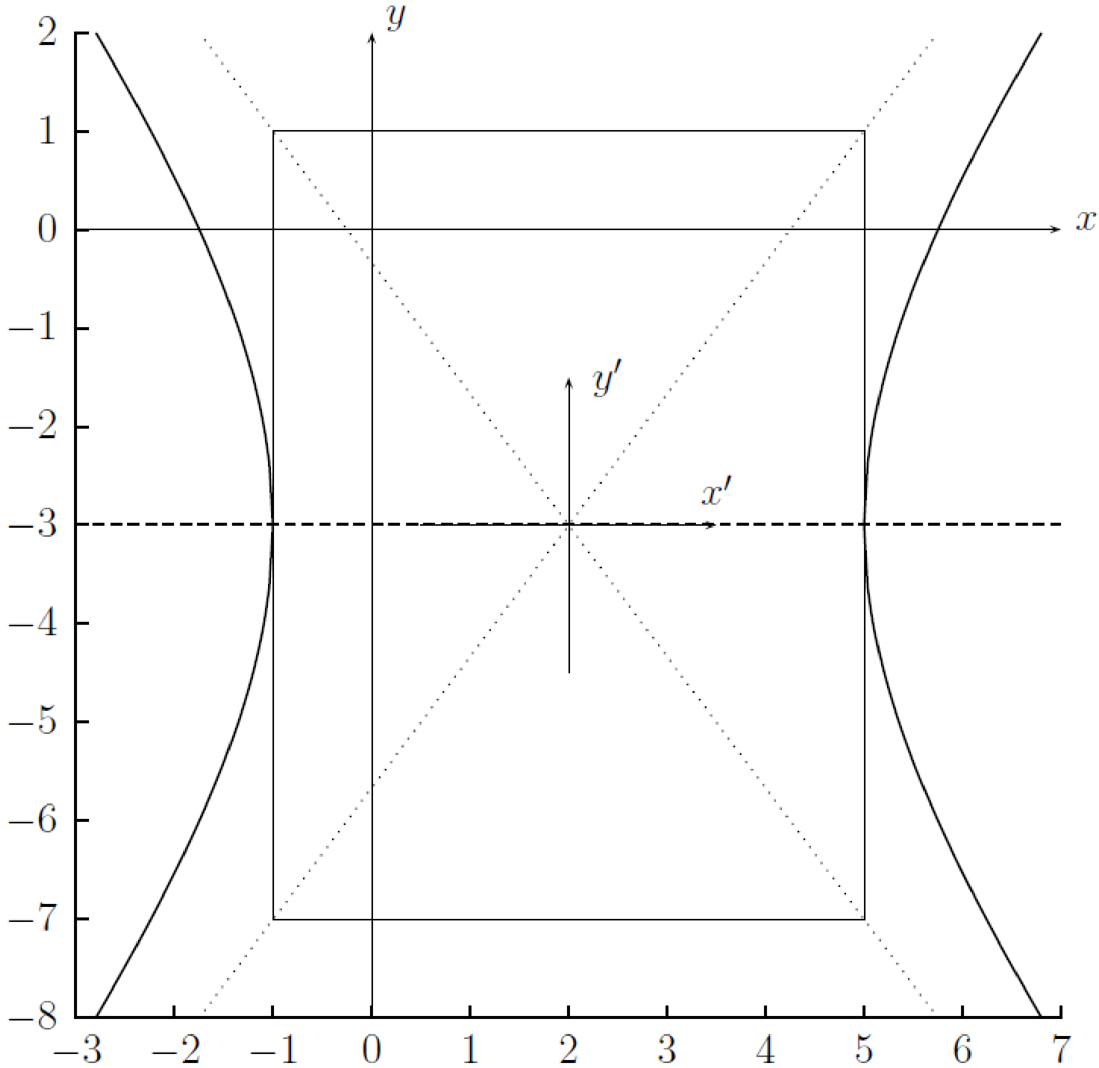
Полуоси: $a = 3,\ b = 4$, центр $C(2, -3)$.

Эксцентриситет: $\varepsilon = c/a = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{5}{3};$

Уравнения асимптот: $y' = \pm\frac{b}{a}x' \ \Rightarrow\ y + 3 = \pm\frac{4}{3}(x - 2).$

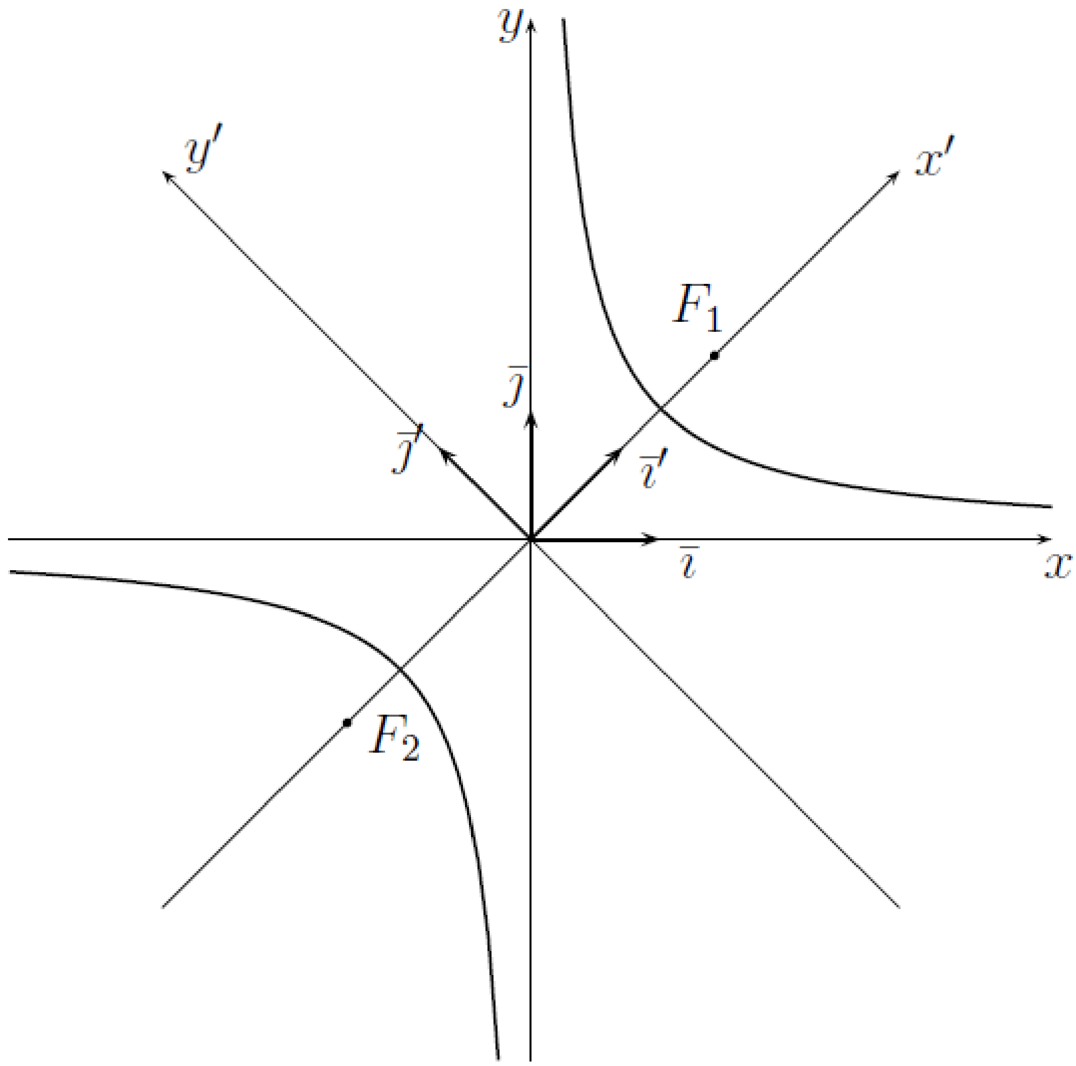
Уравнения дирекрисс: $x' = \pm a/\varepsilon = \pm 9/5$,

$d_1:\ x - 2 = -9/5 \Rightarrow x = 1/5;\quad d_2:\ x - 2 = 9/5 \Rightarrow x = 19/5.$ $\triangleright$




**2.276.** Показать, что кривая, заданная уравнением $xy = 1$ или $y = 1/x$, есть равносторонняя гипербола. Написать ее каноническое уравнение, найти ее эксцентриситет, фокусы и уравнения директрисс.

◁ Рассмотрим наряду с заданной системой координат $Oxy$ систему $Ox'y'$, начало которой совпадает с началом $Oxy$, а координатные стрелки повернуты относительно начала координат на угол 45° (см. рисунок).




Выясним, как связаны координаты некоторой точки на плоскости в системах координат $Oxy$ и $Ox'y'$. Для координатных векторов имеем

$$\begin{cases} \bar{\imath}' &= \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\jmath}; \\ \bar{\jmath}' &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\jmath}; \end{cases};$$

обозначив за $(x, y)$ и $(x', y')$ координаты некоторой точки в системах $Oxy$ и $Ox'y'$, получим

$$x'\bar{\imath}' + y'\bar{\jmath}' = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}x'(\bar{\imath} + \bar{\jmath}) + \frac{1}{\sqrt{2}}y'(-\bar{\imath} + \bar{\jmath}) = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} \Rightarrow \begin{cases} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \end{cases}.$$

Переходя к координатам $(x', y')$, получаем каноническое уравнение равносторонней гиперболы:

$$xy = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') = \frac{1}{2}\left((x')^2 - (y')^2\right) = 1.$$

Каноническое уравнение: $\frac{(x')^2}{2} - \frac{(y')^2}{2} = 1, \quad x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y), \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(y - x).$ $\triangleright$

Полуоси: $a = b = \sqrt{2}$.

Эксцентриситет: $\varepsilon = c/a = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{2}$.

Фокусы: $F_1(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $F_2(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Уравнения директрисс: $x' = \pm a/\varepsilon = \pm 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y) = \pm 1$,

$d_1: \ x + y = -\sqrt{2}; \quad d_2: \ x + y = \sqrt{2}.$ ▷

Решим несколько задач на составление уравнений гиперболы.

**5.**

(5) Зная уравнения асимптот гип-лы $y = \pm\frac{1}{2}x$ и одну из её точек $M(12; 3\sqrt{3})$, составить уравнение гиперболы

Решение: $b/a = \pm 1/2 \Rightarrow a = 2b \Rightarrow \frac{x^2}{4b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Подставив точку, получим $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$

**6.**

(6) Составить уравнение гиперболы, зная, что угол м/у асимптотами гип-лы и осью $Ox = 60°$, $O'(3; -1)$ — центр гиперболы, т. $C(0; -1+2\sqrt{6})$ лежит на ней.

Решение: $\frac{(x-3)^2}{a^2} - \frac{(y+1)^2}{b^2} = \pm 1$

Т.к. т. $C$ лежит слева от ас-т, это не сопряжённая гип-ла $\Rightarrow \frac{(x-3)^2}{a^2} - \frac{(y+1)^2}{b^2} = 1$

$\frac{b}{a} = tg\,60° = \sqrt{3} \Rightarrow b^2 = 3a^2 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{a^2} - \frac{(y+1)^2}{3a^2} = 1$

Подставив точку, получим $a = 1$ и

$\frac{(x-3)^2}{1} + \frac{(y+1)^2}{3} = 1$

**7.**

(7) Составить уравнение гиперболы с фокусами $F_1(6; -1)$ и $F_2(-2; -1)$, кот. пересекает ось $Ox$ в т. $C(2+\sqrt{70}/3; 0)$. Сделать рисунок

Решение: $O(2; -1)$ — центр гиперболы

$2c = 8 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow a^2 + b^2 = 16$

Подставив точку, ~~найдём~~ в уравнение гип-лы

$\frac{(x-2)^2}{a^2} - \frac{(y+1)^2}{b^2} = 1$

**8.**

8) Составить ур-е гиперболы, фокусы кот. расп-ны в точках $F_1(24,1)$, $F_2(-28,1)$, а расст-е между вершинами 48.

Решение: Центр $O(-2;1)$, действ. полуось 24, фок. расст-е $c=26 \Rightarrow b=10 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(x+2)^2}{576}-\frac{(y-1)^2}{100}=1.$$

NOTES

**Парабола.**

3) Парабола

ГМТ, равноудаленных от данной прямой (директрисы) и данной точки (фокуса)

Канон. ур-е параболы: $y^2=2px$, $p>0$ - парам (фок. параметр, расст-е от фокуса до директрисы)

Фокус $F(p/2;0)$, директриса $d=-\frac{p}{2}$

**2.288.** Установить, что каждое из уравнений определяет параболу, найти координаты ее вершины $A$ и величину параметра $p$.

а) $y^2 = 4x - 8$;  в) $y = 4x^2 - 8x + 7$;  е) $x = 2y^2 - 12y + 14$.

◁ а) $y^2 = 2 \cdot 2(x - 2)$;

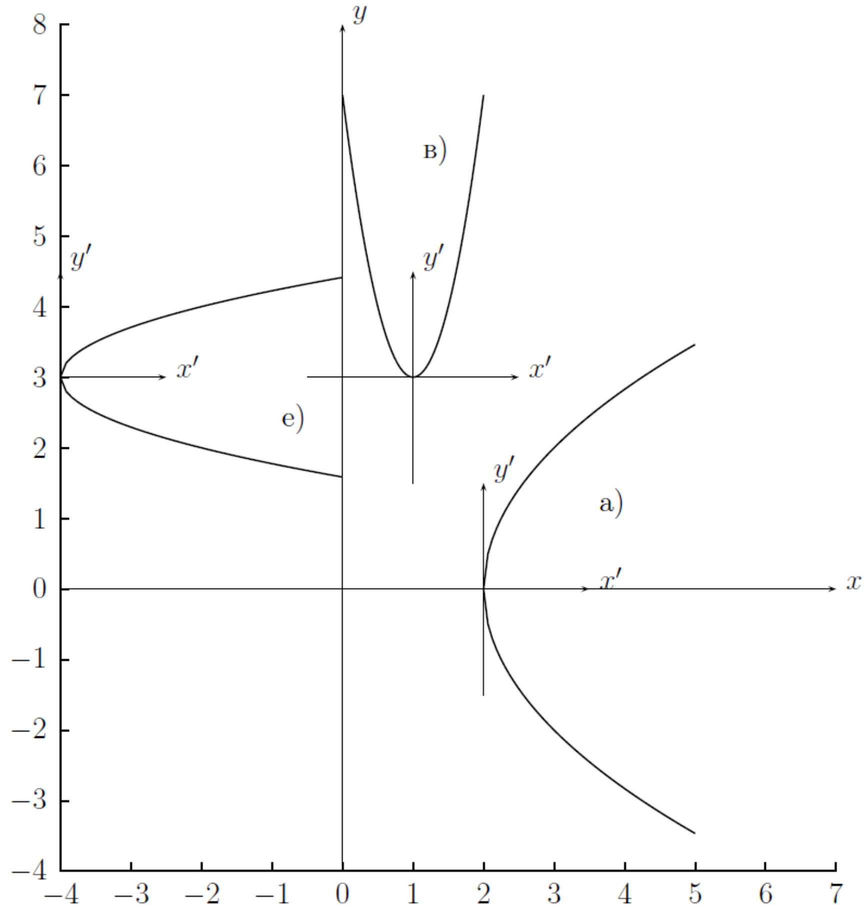
Каноническое уравнение: $(y')^2 = 2p\,x'$, $x' = x - 2$, $y' = y$, вершина $A(2, 0)$, параметр $p = 2$.

в) $y = 4(x - 1)^2 + 3$;

Каноническое уравнение: $(y')^2 = 2p\,x'$, $x' = y - 3$, $y' = x - 1$, вершина $A(1, 3)$, параметр $p = 1/8$.

е) $x = 2(y - 3)^2 - 4$;

Каноническое уравнение: $(y')^2 = 2p\,x'$, $x' = x + 4$, $y' = y - 3$, вершина $A(-4, 3)$, параметр $p = 1/4$. ▷




Решим пару задач на составление парабол.

**9.**

⑨ Найти уравнение параболы, если известно, что парабола симметрична отн-но прямой $y+3=0$, имеет директрису $x = 7/4$ и проходит через точку $C(1/4; -3/2)$.

Решение: Уравнение такой параболы:

$$(y+3)^2 = 2p(x - x_0)$$

Директриса: $x - x_0 = \frac{p}{2}$, $x = \frac{7}{4} \Rightarrow x_0 = \frac{p}{2} + \frac{7}{4}$

Подставим в уравнение $x_0 = \frac{p}{2} + \frac{7}{4}$ и точку $C$:

$$\frac{9}{4} = 2p\left(\frac{1}{4} - x_0\right) \Rightarrow p = -\frac{3}{2},\ x_0 = 1$$

Уравнение параболы: $(y+3)^2 = -3(x-1)$

**10.**

(10) Составить уравнение параболы, кот. симметрична отн-но прямой $x+3=0$, проходит через точку $C(-1;2)$, расстояние от фокуса до директрисы равно 2, а ветви расположены в полуп-ти $y \le 0$.

Решение: Симметрия отн-но $x+3=0 \Rightarrow x_0=-3$.

$p=2$ (расст-е от фокуса до директрисы)

$y \le 0 \Rightarrow$ уравнение параболы

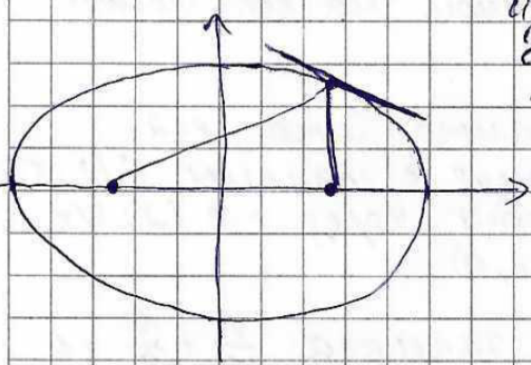
$$(x+3)^2 = -4(y-y_0)$$

Подставив точку $C(-1;2)$, получим $y_0$:

$$(x+3)^2 = -4(y-1)$$

**Оптическое свойство кривых второго порядка.**

Для эллипса: луч света, выпущенный из одного фокуса и отражённый от стенки, перейдет в другой фокус.

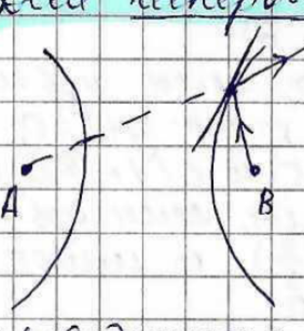


Углы касательной с отрезками, соединяющей точку касания с фокусами, равны.

Для параболы: лучи света, выпущенные из фокуса и отраженные от стенки, пойдут параллельным пучком (⊥-но директрисе)

Касательная к параболе является биссектрисой угла между отрезком из точки касания в фокус и перпендикуляром из нее на директрису.

Для гиперболы: если поместить в один из фокусов источник света, то покажется луч после отражения от гиперболы выйдет исходящим из другого фокуса.




Касательная к гиперболе, проведенная к т. M, явл. биссектрисой угла $\angle AMB$, где $A$, $B$ — фокусы.

**14.**

(14) Из правого фокуса эллипса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ выпущен луч света вертикально вверх. Дойдя до эллипса, луч от него отразился. Найти ур-е прямой, на кот. лежит отраженный луч.

Решение: Уравнение прямого луча $x=2$.
Точка пересечения с эллипсом $C(2; 5/3)$.
Отраженный луч проходит через т. $C(2; 5/3$ и второй фокус $F_2(-2;0)$.

**15.**

(15) Из правого фокуса эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ под углом $\alpha$, $0<\alpha<\pi$, $tg\alpha = -12/5$ к оси $Ox$ вышел луч света. Дойдя до эллипса, луч от него отразился. Составить уравнение прямой, на кот. лежит отраженный луч.

Решение: Фокусы $F_1(4;0)$, $F_2(-4,0)$
ур-е прямого луча: $y = -\frac{12}{5}(x-4)$
Точка пересечения прям. луча с эллипсом:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ y = -\frac{12}{5}(x-4) \end{cases} \Rightarrow A\left(3; \frac{12}{5}\right)$$

Уравнение отраж. луча: $\frac{x+4}{7} = \frac{5y}{12}$

(Д/З) (1) 2. 249 в, 269 в, 288 (б, г, д)

(2) Составить ур-е эллипса, если известно, что он симм-н отн-но прямых $x=1$ и $y+2=0$, проходит через точки $A(1-\frac{5}{2}\sqrt{3}; -5)$ и $C(1+\frac{10}{3}\sqrt{2}; 0)$.

(3) Составить ур-е гиперболы, если изв-но, что она проходит через т. $C(\frac{1}{5}; \frac{2}{5})$ и имеет ас-ты $3x-4y+31=0$ и $3x+4y-1=0$.

(4) Составить ур-е параболы, если изв-но, что она пересекает ось $Ox$ в т. $C(1;0)$, имеет директрису $x=13/3$, а ее вершина расположена в IV четверти на расст-и $1/3$ от фокуса.

(5) Из левого фокуса гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$ под углом $135°$ к оси $Ox$ вышел луч света. Дойдя до гип-лы, луч от нее отразился. Составить ур-е прямой, на кот. лежит отраженный луч.

9 NOTES