Вариант 1

Везде, где явно не указано иное, константы предполагаются действительными.

1 (*5 баллов*). Найти обратную матрицу к матрице A размера $n \times n$, если

$$A = \begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \\ \hdotsfor{6} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 (*5 баллов*). Найти ФСР и общее решение однородной СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

над полем вычетов $\mathbb{Z}_7$.

3 (*5 баллов*). Найти ранг матрицы A в зависимости от параметра λ, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ \lambda & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4 (*5 баллов*). Общее решение некоторой СЛАУ имеет вид

$$(5, -1, 0, 2)^T + c_1(1, -1, 1, -1)^T + c_2(2, 0, -3, 0)^T.$$

Какое наименьшее число уравнений может иметь такая СЛАУ? Привести пример системы с таким решением.

Вариант 2

Везде, где явно не указано иное, константы предполагаются действительными.

1 (*5 баллов*). Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \cdots & 2 & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 2 & \cdots & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

порядка n.

2 (*5 баллов*). Найти общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ 6x_1 + 3x_2 + 9x_3 = -3 \\ x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -5. \end{cases}$$

3 (*5 баллов*). Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 4 & 0 & -4 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

4 (*5 баллов*). Найти все матрицы, перестановочные с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 3

Везде, где явно не указано иное, константы предполагаются действительными.

1 (*5 баллов*). Вычислить A^{2018}, где

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 5 & -4 \\ -11 & -6 & 5 \\ 7 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

2 (*5 баллов*). Найти ФСР и общее решение однородной СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

3 (*5 баллов*). Найти ранг матрицы A в зависимости от параметра λ, если

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 0 & 18 & 6 \\ 1 & \lambda & 7 & 17 & 8 \\ 1 & -2 & -4 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

4 (*5 баллов*). Общее решение некоторой СЛАУ имеет вид

$$c_1(1, 1, -2, 4)^T + c_2(7, 1, 1, -5)^T.$$

Какое наименьшее число уравнений может иметь такая СЛАУ? Привести пример системы с таким решением.

Вариант 4

Везде, где явно не указано иное, константы предполагаются действительными.

1 (*5 баллов*). Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \hdotsfor{4} \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

порядка n.

2 (*5 баллов*). Найти общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

над полем вычетов $\mathbb{Z}_5$.

3 (*5 баллов*). Решить матричное уравнение

$$X \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 5 \\ 1 & -6 & -8 \\ 11 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

4 (*5 баллов*). Найти все матрицы, перестановочные с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 5

Везде, где явно не указано иное, константы предполагаются действительными.

1 (*5 баллов*). Найти обратную матрицу к матрице A размера $n \times n$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 3 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2n-3 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 2n-1 \end{pmatrix}.$$

2 (*5 баллов*). Найти ФСР и общее решение однородной СЛАУ

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

над полем вычетов $\mathbb{Z}_7$.

3 (*5 баллов*). Найти ранг матрицы A в зависимости от параметра λ, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & \lambda & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

4 (*5 баллов*). Общее решение некоторой СЛАУ имеет вид

$$(0,0,0,1)^T + c_1(1,-2,3,0)^T + c_2(1,1,1,1)^T.$$

Какое наименьшее число уравнений может иметь такая СЛАУ? Привести пример системы с таким решением.

Вариант 6

Везде, где явно не указано иное, константы предполагаются действительными.

1 (*5 баллов*). Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -2 \\ 0 & 1 & \cdots & -2 & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & -2 & \cdots & 1 & 0 \\ -2 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

порядка n.

2 (*5 баллов*). Найти общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 5 \\ 2x_1 + 4x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

3 (*5 баллов*). Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

4 (*5 баллов*). Найти все матрицы, перестановочные с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 7

Везде, где явно не указано иное, константы предполагаются действительными.

1 (*5 баллов*). Вычислить A^{2019}, где

$$A = \begin{pmatrix} -23 & -53 \\ 10 & 23 \end{pmatrix}.$$

2 (*5 баллов*). Найти ФСР и общее решение однородной СЛАУ

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 15x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

3 (*5 баллов*). Найти ранг матрицы A в зависимости от параметра λ, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

4 (*5 баллов*). Общее решение некоторой СЛАУ имеет вид

$$c_1(1, 2, -11, 1)^T + c_2(1, -1, 10, 10)^T.$$

Какое наименьшее число уравнений может иметь такая СЛАУ? Привести пример системы с таким решением.

Вариант 8

Везде, где явно не указано иное, константы предполагаются действительными.

1 (*5 баллов*). Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

порядка n.

2 (*5 баллов*). Найти общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

над полем вычетов $\mathbb{Z}_5$.

3 (*5 баллов*). Решить матричное уравнение

$$X \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ -9 & 10 & -4 \\ 3 & 26 & -2 \end{pmatrix}.$$

4 (*5 баллов*). Найти все матрицы, перестановочные с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 9

Везде, где явно не указано иное, константы предполагаются действительными.

1 (*5 баллов*). Найти обратную матрицу к матрице A размера $n \times n$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & -1 & 1 \\ \hdotsfor{5} \\ 1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 (*5 баллов*). Найти ФСР и общее решение однородной СЛАУ

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 0 \\ 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

над полем вычетов $\mathbb{Z}_7$.

3 (*5 баллов*). Найти ранг матрицы A в зависимости от параметра λ, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & \lambda & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4 (*5 баллов*). Общее решение некоторой СЛАУ имеет вид

$$(1, 2, 3, 4)^T + c_1(1, -1, 1, -1)^T + c_2(0, 2, 3, 2)^T.$$

Какое наименьшее число уравнений может иметь такая СЛАУ? Привести пример системы с таким решением.

Вариант 10

Везде, где явно не указано иное, константы предполагаются действительными.

1 (*5 баллов*). Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

порядка n.

2 (*5 баллов*). Найти общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 2 \\ -5x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 14x_2 + 5x_3 - 10x_4 = 5. \end{cases}$$

3 (*5 баллов*). Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 14 & -4 \\ 17 & 0 & 17 \\ -4 & 14 & 3 \end{pmatrix}.$$

4 (*5 баллов*). Найти все матрицы, перестановочные с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$