Примерный вариант № 1

Везде, где явно не указано иное, константы предполагаются действительными.

1 (*4 балла*). Вычислить $A^{2018} + A^{2017} + \dots + A + E$, где

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 13 & -8 \end{pmatrix}.$$

2 (*4 балла*). Найти ФСР и общее решение однородной СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 7x_3 - x_4 - 9x_5 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - 4x_5 = 0 \\ 7x_1 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

3 (*4 балла*). Найти ранг матрицы A в зависимости от параметра λ, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & \lambda & 2 & 7 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4 (*4 балла*). Общее решение некоторой СЛАУ имеет вид

$$(-1 + c_1 + 2c_2,\ -3 + c_1 + 2c_2,\ c_1 + c_2,\ c_1 - 2c_2)^T.$$

Какое наименьшее число уравнений может иметь такая СЛАУ? Привести пример системы с таким решением.

5 (*5 баллов*). Доказать, что если K — поле, характеристика которого не равна 2, n — нечётное число, и A — антисимметричная матрица, то $|A| = 0$.

Примерный вариант № 2

Везде, где явно не указано иное, константы предполагаются действительными.

1 (*4 балла*). Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{vmatrix}$$

порядка n.

2 (*4 балла*). Найти общее решение СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 6 \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

над полем вычетов $\mathbb{Z}_7$.

3 (*4 балла*). Решить матричное уравнение

$$X \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4 (*4 балла*). Найти все матрицы, перестановочные с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. (*5 баллов*). Найти порядок группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ невырожденных матриц размера 2×2 над полем вычетов по модулю p.