Программа для подготовки к рубежному контролю № 1 по линейной алгебре и аналитической геометрии

ИУ-9, 1 семестр

Примеры задач

1. В параллелограмме $ABCD$ точка M делит диагональ AC в отношении $1:2$, а точка N делит диагональ BD в отношении $3:1$. Выразить вектор $\vec{MN}$ через векторы $\vec{a} = \vec{AB}$ и $\vec{b} = \vec{AD}$. (Ответ: $\vec{MN} = -\frac{1}{12}\vec{a} + \frac{5}{12}\vec{b}$.)

2. Диагонали $\vec{AC}$ и $\vec{BD}$ параллелограмма $ABCD$ образуют угол 60°, при этом $|\vec{AC}| = 2$, $|\vec{BD}| = 1$. Найти угол этого параллелограмма при вершине A. (Ответ: $\cos\angle A = 1/\sqrt{7}$.)

3. Объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, равен 3. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, равна 2. Найти высоту параллелепипеда, построенного на векторах

$$-3\vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{a} - \vec{b}, \quad -\vec{a} - \vec{b} + 4\vec{c},$$

опущенную из конца третьего вектора на плоскость, в которой лежат первые два. (Ответ: $h = 6$.)

4. Даны точки $A(-2,-1,0)$, $B(1,1,1)$, $C(-1,0,1)$, а о точке D известно, что она лежит на отрицательной части оси Oy. Найти координаты точки D, если объём тетраэдра $ABCD$ равен 1. (Ответ: $D(0,-5,0)$.)

5. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(11,2,1)$ и пересекающей прямые

$$\frac{x+1}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{2}.$$

(Ответ: $\{x = -1 + 6t,\ y = t,\ z = 1\}$)

6. Найти канонические уравнения проекции L' прямой $L\colon \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-6}{5}$ на плоскость $\alpha\colon x - y = 0$ и прямой L'', симметричной прямой L относительно плоскости α. (Ответ: $L'\colon \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{5}$, $L''\colon \frac{x-1}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{5}$.)

7. Составить общие уравнения биссектрисы L' острого и биссектрисы L'' тупого угла между прямыми $x + y = 0$ и $7x - y = 8$. (Ответ: $L'\colon x - 3y = 4$, $L''\colon 3x + y = 2$.)

8. Найти точку Q, симметричную точке $P(-3,9,7)$ относительно прямой $\{x = 1 - 2t,\ y = 1 + 4t,\ z = -1 + 3t,\ t \in \mathbf{R}\}$. (Ответ: $Q(1,1,1)$.)

9. Среди плоскостей, проходящей через прямую

$$\begin{cases} 2x - 3y - 3z + 2 = 0, \\ x - 5y + 2z + 10 = 0, \end{cases}$$

найти ту, которая перпендикулярна плоскости $x + y + z - 3 = 0$. (Ответ: $7y - 7z - 18 = 0$.)

10. Найти общие уравнения плоскостей, которые проходят через точки $P(0,0,20)$ и $Q(11,1,1)$ и отсекают от положительного координатного октанта тетраэдр объёма 1200. (Ответ: $5x + 2y + 3z = 60$, $2x + 605y + 33z = 660$.)

11. Показать, что прямые

$$\frac{x+3}{5} = \frac{y-14}{-6} = \frac{z-1}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x-7}{3} = \frac{y-10}{4} = \frac{z+11}{-7}$$

пересекаются, найти точку P их пересечения и составить общее уравнение плоскости, которой они принадлежат. (Ответ: $P(1,2,3)$, $x + y + z = 6$.)

12. Составить уравнение параболы, которая симметрична относительно прямой $x = -3$, пересекает ось Oy в точке $C(0, -\frac{5}{4})$, и имеет директрису $d\colon y = 2$. (Ответ: $(x+3)^2 = -4(y-1)$.)

13. Из правого фокуса эллипса

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$$

под углом α, $\operatorname{tg}\alpha = -2\sqrt{6}$, $-\pi/2 < \alpha < 0$, к оси Ox вышел луч света. Дойдя до эллипса, луч от него отразился. Составить общее уравнение прямой, на которой лежит отражённый луч. (Ответ: $6\sqrt{6}x + 25y + 18\sqrt{6} = 0$.)

14. Привести уравнение

$$9x^2 + z^2 - 36x - 18y + 6z - 27 = 0$$

поверхности второго порядка к каноническому виду. Определить тип поверхности. (Ответ: эллиптический параболоид $\frac{(x-2)^2}{1^2} + \frac{(z+3)^2}{3^2} = 2y$.)

`ИУ-9, ЛА и АГ, 1 семестр, КР1. Каждая задача оценивается в 3 балла. Необходимый минимум -- 12 баллов.`

Примерный вариант

Везде, где это существенно, система координат предполагается правой прямоугольной.

1. Показать, что любые два из трёх векторов $\vec{a} = (3, -7)$, $\vec{b} = (-2, 5)$, $\vec{c} = (1 - 2)$ образуют базис на плоскости. Выразить каждый из этих векторов через два других.

2. Вершинами тетраэдра служат точки $A(3, -2, 1)$, $B(6, 0, 3)$, $C(4, -1, 1)$, $D(2, -1, 3)$. Найти объём и высоту тетраэдра, опущенную из вершины D на грань ABC.

3. Составить канонические уравнения общего перпендикуляра к прямым $\{x = -4 - 5t,\ y = -3 + 2t,\ z = -4 + t\}$ и $\{x = 4 - s,\ y = 20 + 3s,\ z = 7 - 2s\}$.

4. Убедиться, что прямая $\begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$ и плоскость $3x + 8y - 5z + 15 = 0$ параллельны и найти расстояние между ними.

5. Привести уравнение $25x^2 - y^2 + 100x + 2y + 74 = 0$ кривой 2-го порядка к каноническому виду. Построить кривую в исходной системе координат.

6. Найти формулы аффинного преобразования плоскости, которое получается в результате сначала симметрии относительно прямой $x + 2y = 0$, затем симметрии относительно прямой $3x + y = 0$, и наконец сдвига на вектор $(1, 1)$.

Ответы

к задачам примерного варианта

1. $\vec{a} = -\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{b} = -\vec{a} + \vec{c}$, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.
2. $V = 1$, $h = 2$.
3. $\frac{x}{7} = \frac{y}{11} = \frac{z}{13}$.
4. $\sqrt{2}$.
5. Гипербола $\frac{(x+2)^2}{1^2} - \frac{(y-1)^2}{5^2} = 1$.
6. $\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = -x + 1. \end{cases}$