Программа для подготовки к рубежному контролю № 2
,,Алгебраические структуры''
по линейной алгебре и аналитической геометрии
для ИУ-9, 2020-2021 уч. год

Примеры задач

1. Найти решётку подгрупп циклической группы $\mathbb{Z}_{20}$.

2. Найти все элементы мультипликативной группы $\mathbb{Z}_{14}^*$ кольца вычетов $\mathbb{Z}_{14}$. Изоморфна ли эта группа циклической группе $\mathbb{Z}_7$? Группе $\mathbb{Z}_6$? (Ответ обосновать.)

3. В мультипликативной группе $\mathbb{Z}_{17}^*$ поля $\mathbb{Z}_{17}$ найти 2016-ю степень элемента $a = 13$.

4. Содержит ли группа подстановок S_{12} элемент порядка 18? Порядка 24? (Ответ обосновать.)

5. В группе подстановок S_7 найти подгруппу, порождённую циклом (167) и транспозицией (23). Какой из следующих групп изоморфна эта подгруппа: V_4 (четверная группа Клейна), $\mathbb{Z}_6$, S_3? (Ответ обосновать.)

6. Решить уравнение $(247)(23)X(2546) = (15376)(24)$ в группе подстановок S_7. Для найденной подстановки X определить её порядок и чётность.

7. На комплексной плоскости изобразить множество точек, заданное неравенством

$$|z - 2i| - |z + 2i| \leqslant 1.$$

Какая кривая служит границей этой области?

8. Вычислить 2017-ю степень комплексного числа $z = \frac{-(5/2)+(i/2)}{\sqrt{2}-(3/\sqrt{2})i}$.

9. Найти НОД многочленов $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 + 1$ и $g(x) = x^5 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 2$ над полем $\mathbb{Z}_3$.

10. Является ли многочлен $f(x) = x^5 + x^4 + 1$ неприводимым над полем вычетов $\mathbb{Z}_2$? Если нет, разложить его на неприводимые множители.

11. В поле вычетов $\mathbb{Z}_{107}$ найти элемент, обратный элементу $a = 31$.

12. Найти ось и угол поворота 3-мерного вращения, которое получается в результате сначала вращения вокруг оси, заданной вектором $(2, 2, 1)$, на угол $240°$ в положительном направлении, а затем вращения вокруг оси, заданной вектором $(3\sqrt{3}, 2\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} + 2)$, на угол $\alpha = 2\arccos(1/4\sqrt{3})$ в положительном направлении. (Указание: вращение вокруг оси, заданной единичным вектором (l, m, n), на угол α представляется кватернионом $q = \cos(\alpha/2) + (l\mathrm{i} + m\mathrm{j} + n\mathrm{k})\sin(\alpha/2)$; действие такого вращения на вектор v может быть вычислено как qvq^{-1}; необходимо представить данные вращения кватернионами q и p и вычислить произведение pq.)

Примерный вариант билета рубежного контроля

каждая задача оценивается в 4 балла; необходимый минимум для зачёта -- 12 баллов

1. Вычислить 2016-ю степень подстановки

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 4 & 7 & 10 & 2 & 8 & 1 & 11 & 5 & 9 & 6 \end{pmatrix} \in S_{11}.$$

2. Над полем вычетов $\mathbb{Z}_{13}$ решить систему уравнений

$$\begin{cases} 7x + 8y + z = 10 \\ 2x + 5y + 12z = 12 \\ 6x + y + 2z = 10. \end{cases}$$

3. Вычислить комплексный корень $\sqrt[6]{\frac{-6-13i}{13-6i}}$.

4. Разложить на неприводимые многочлен $x^4 + 6x^3 + 26x^2 + 6x + 25$ над полем $\mathbb{C}$ комплексных и полем $\mathbb{R}$ действительных чисел.

5. В поле $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ найти элемент, обратный элементу $a = 1 + \sqrt[3]{9}$, и представить его в виде $x + y\sqrt[3]{3} + z\sqrt[3]{9}$, $x, y, z \in \mathbb{Q}$.