Вопросы для подготовки к экзамену по линейной алгебре и аналитической геометрии для ИУ-9, 1-й семестр, лектор Д. А. Степанов

Часть 1: векторная алгебра и аналитическая геометрия

1. Сформулировать определения геометрического, свободного вектора, коллинеарных и компланарных векторов, линейных операций над векторами. Сформулировать и доказать свойства линейных операций.

2. Дать определения линейной зависимости и независимости системы векторов, коллинеарности и компланарности векторов. Сформулировать и доказать геометрические критерии линейной зависимости 2-х и 3-х векторов. Доказать теорему о линейной зависимости 4-х векторов.

3. Дать определение базиса. Доказать теорему о разложении вектора по базису. Сформулировать определение координат вектора и доказать утверждение о линейных операциях в координатах.

4. Дать определение декартовой системы координат. Какая система координат называется прямоугольной? Записать формулу для вычисления расстояния между двумя точками в прямоугольной системе координат и вывести формулу деления отрезка в заданном отношении.

5. Сформулировать определение матрицы перехода от базиса к базису. Вывести формулы преобразования координат вектора и координат точки при переходе к новой системе координат.

6. Дать определение скалярного произведения векторов. Описать связь скалярного произведения с понятием ортогональной проекции вектора. Сформулировать и доказать свойства скалярного произведения.

7. Записать формулу для вычисления скалярного произведения в координатах и вывести эту формулу. Доказать следствие из этой формулы для ортонормированного базиса. Вывести формулу для длины вектора, направляющих косинусов вектора, угла между векторами в ортонормированном базисе. Геометрический смысл координат вектора в ортонормированном базисе.

8. Что такое ориентация плоскости? Дать определение ориентированной площади параллелограмма, сформулировать и доказать её основные свойства.

9. Что такое ориентация пространства? Правые и левые тройки векторов. Дать определение объёма ориентированного параллелепипеда, сформулировать и доказать его основные свойства.

10. Дать определения векторного и смешанного произведений векторов. Доказать теорему о связи трёх произведений векторов. Сформулировать и доказать основные свойства векторного и смешанного произведения векторов.

11. Вывести формулы для вычисления векторного произведения и смешанного произведения векторов в правом ортонормированном базисе.

12. Доказать теорему об уравнении 1-го порядка как уравнении прямой на плоскости в декартовой прямоугольной системе координат. Записать уравнение прямой с угловым коэффициентом, уравнение в отрезках на осях, параметрическое и каноническое уравнения, уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. Объяснить смысл входящих в эти уравнения параметров.

13. Описать способы исследования взаимного расположения двух прямых на плоскости. Вывести формулу для расстояния от точки до прямой и формулу для угла между двумя прямыми.

14. Дать определение пучка прямых на плоскости (собственного и несобственного). Доказать теорему об уравнении собственного пучка прямых и записать уравнение несобственного пучка прямых.

15. Доказать теорему об уравнении 1-го порядка как уравнении плоскости в пространстве. Записать уравнение плоскости в отрезках на осях, параметрическое уравнение, уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки. Объяснить смысл входящих в эти уравнения параметров.

16. Описать способы исследования взаимного расположения двух плоскостей в пространстве. Вывести формулу для расстояния от точки до плоскости (для случаев задания плоскости общим и параметрическим уравнением).

17. Дать определение пучка плоскостей в пространстве (собственного и несобственного). Доказать теорему об уравнении собственного пучка плоскостей и записать уравнение несобственного пучка плоскостей.

18. Дать определение связки плоскостей в пространстве (собственной и несобственной). Доказать теорему об уравнении собственной связки плоскостей и записать уравнение несобственной связки плоскостей.

19. Записать общие, параметрические, канонические уравнения прямой в пространстве, уравнения прямой, проходящей через две заданные точки. Объяснить смысл входящих в эти уравнения параметров.

20. Описать способы исследования взаимного расположения двух прямых, прямой и плоскости в пространстве. Вывести формулы для расстояния от точки до прямой и для расстояния между скрещивающимися прямыми в пространстве.

21. Дать определение эллипса. Вывести его каноническое уравнение. Описать основные параметры эллипса: полуоси, центр и оси симметрии, эксцентриситет.

22. Дать определение гиперболы. Вывести её каноническое уравнение. Описать основные параметры гиперболы: полуоси, центр и оси симметрии, асимптоты, эксцентриситет.

23. Дать определение параболы. Вывести её каноническое уравнение.

24. Доказать директориальные свойства эллипса и гиперболы. Вывести полярные уравнения эллипса, гиперболы и параболы.

25. Вывести уравнения касательных к эллипсу, гиперболе, параболе.

26. Сформулировать и доказать оптические свойства эллипса, гиперболы, параболы.

27. Эллипс, гипербола и парабола как конические сечения (доказательство провести для эллипса или гиперболы).

28. Записать канонические уравнения эллипсоида, гиперболоидов, параболоидов. Исследовать эти поверхности методом сечений.

29. Дать определение поверхностей вращения, цилиндрических, конических поверхностей. Вывести уравнения поверхностей 2-го порядка, получающихся при вращении эллипса, гиперболы и параболы вокруг одной из осей симметрии.

30. Сформулировать определение невырожденного аффинного преобразования плоскости. Доказать теорему о формулах, задающих невырожденное аффинное преобразование плоскости.

31. Сформулировать и доказать групповые свойства невырожденных аффинных преобразований плоскости. Дать определение движения.

32. Сформулировать определение аффинного преобразования плоскости. Доказать теорему о существовании аффинного преобразования, переводящего три заданные точки в три заданные точки.

Часть 2: алгебраические структуры

33. Дать определение бинарной операции и алгебраической структуры. Дать определение ассоциативной бинарной операции, коммутативной бинарной операции. Дать определение нейтрального элемента, обратного элемента и доказать утверждения о их единственности. Дать определения полугруппы, моноида, группы. Привести примеры.

34. Дать определение группы, абелевой группы, подгруппы, порядка элемента группы, гомоморфизма и изоморфизма групп. Привести примеры, иллюстрирующие эти понятия. Доказать теорему Лагранжа.

35. Дать определение группы, порождающей системы элементов, циклической группы, порядка элемента группы. Привести примеры. Доказать теорему о классификации циклических групп и теорему о подгруппе циклической группы. Сформулировать и доказать следствие теоремы Лагранжа о порядке элемента группы.

36. Дать определение группы подстановок. Сформулировать и доказать теорему о разложении подстановки в произведение независимых циклов и произведение транспозиций.

37. Дать определение чётной и нечётной подстановки. Объяснить и обосновать, как чётность подстановки определяется по её разложению в произведение транспозиций. Дать определение знакопеременной группы.

38. Дать определение кольца. Какое кольцо называется ассоциативным, коммутативным, кольцом с единицей? Сформулировать и обосновать основные положения теории делимости в кольце целых чисел: бесконечность множества простых чисел, деление с остатком, наибольший общий делитель и алгоритм Евклида, основная теорема арифметики.

39. Дать определение кольца, делителя нуля в кольце. Записать и доказать основные свойства сравнений по модулю m в кольце $\mathbb{Z}$ целых чисел. Описать построение кольца вычетов $\mathbb{Z}_m$ по модулю m. Привести примеры делителей нуля в $\mathbb{Z}_m$.

40. Дать определение поля. Привести примеры. Доказать теорему об условии, при котором кольцо вычетов будет полем. Дать определение характеристики поля. Доказать, что характеристика поля — простое число.

41. Дать определение поля комплексных чисел. Записать формулы, определяющие арифметические операции в поле комплексных чисел. Записать и доказать свойства операции сопряжения.

42. Описать геометрическую интерпретацию поля комплексных чисел. Сформулировать определения модуля, аргумента, тригонометрической формы комплексного числа. Как вычисляется произведение и частное двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме? Вывести формулы Муавра для степени и извлечения корня из комплексного числа. Записать формулы, определяющие основные элементарные функции комплексного переменного. Сформулировать основную теорему алгебры.

43. Дать определение векторного пространства, подпространства. Привести примеры. Сформулировать и доказать следствия из аксиом векторного пространства. Дать определение линейной зависимости и независимости системы векторов. Доказать критерий линейной зависимости. Дать определения базиса векторного пространства и изоморфизма векторных пространств. Доказать, что пространство V_3 свободных векторов изоморфно арифметическому линейному пространству $\mathbb{R}^3$.

44. Дать определение алгебры над полем. Привести примеры. Кольцо многочленов $K[x]$ от одной переменной с коэффициентами в поле K как пример алгебры. Сформулировать и доказать основные положения теории делимости в кольце многочленов: определение неприводимого многочлена, бесконечность множества неприводимых многочленов, деление многочленов с остатком, наибольший общий делитель двух многочленов и алгоритм Евклида, теорема о разложении многочлена на неприводимые.

45. Дать определение неприводимого многочлена. Доказать теорему Безу. Доказать теоремы, описывающие неприводимые многочлены над полем $\mathbb{C}$ комплексных и полем $\mathbb{R}$ действительных чисел.

46. Описать алгебру кватернионов: дать определение кватерниона, определить операции над кватернионами, записать свойства этих операций. Доказать ассоциативность умножения кватернионов и существование обратного кватерниона.

47. Описать алгебру кватернионов. Доказать теорему о связи кватернионов с 3-мерными вращениями.

Часть 3: матрицы, определители и системы линейных уравнений

48. Дать определение матрицы. Какие матрицы называются равными? Дать определение линейных операция над матрицами. Сформулировать и доказать свойства линейных операций. Дать определение операции умножения матриц. Доказать её основные свойства. Дать определение операции транспонирования и доказать её свойства.

49. Дать определение определителя квадратной матрицы. Доказать, что определитель матрицы сохраняется при транспонировании.

50. Дать определение определителя квадратной матрицы. Доказать свойства, характеризующие определитель как кососимметричную полилинейную функцию строк (столбцов) матрицы.

51. Дать определение определителя квадратной матрицы. Сформулировать и доказать теорему об определителе матрицы с углом нулей. Доказать свойство $|AB| = |A||B|$. Обосновать метод вычисления определителя с помощью приведения матрицы к треугольному виду.

52. Дать определение определителя квадратной матрицы. Дать определение алгебраического дополнения. Доказать формулы разложения определителя по строке (столбцу) и формулы разложения по чужой строке (столбцу).

53. Дать определение обратной матрицы. Доказать единственность обратной матрицы и свойства операции взятия обратной матрицы. Сформулировать и доказать критерий существования обратной матрицы. Дать определение присоединённой матрицы и вывести формулу для вычисления обратной матрицы. Вывести формулы Крамера для решения системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей.

54. Дать определение элементарных преобразований строк и столбцов матрицы. Доказать, что любую матрицу можно элементарными преобразованиями строк привести к ступенчатому виду. Специальные матрицы и их связь с элементарными преобразованиями. Описать и обосновать метод вычисления обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.

55. Дать определение ранга матрицы. Обосновать корректность этого определения, доказав теорему об инвариантности строчного и столбцового ранга матрицы при элементарных преобразованиях. Обосновать метод вычисления ранга с помощью приведения матрицы к ступенчатому виду.

56. Дать определение минора матрицы, окаймляющего минора. Доказать теорему об окаймляющих минорах. Дать определение базисного минора и доказать теорему о базисном миноре. Сформулировать и доказать следствие для квадратных матриц. Обосновать метод окаймляющих миноров для вычисления ранга матрицы.

57. Дать определение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Перечислить основные формы записи СЛАУ. Какая СЛАУ называется совместной, определённой? Сформулировать и доказать критерий совместности СЛАУ (теорему Кронекера-Капелли).

58. Дать определение однородной СЛАУ. Доказать теорему о свойствах решений однородной СЛАУ. Доказать критерий существований нетривиальных решений однородной СЛАУ (с оценкой минимального количества линейно независимых решений).

59. Дать определения однородной СЛАУ и фундаментальной системы решений однородной СЛАУ. Доказать теоремы о максимальном количестве линейно независимых решений однородной СЛАУ и о структуре общего решения однородной СЛАУ.

60. Дать определение однородной СЛАУ, соответствующей данной неоднородной системе. Сформулировать и доказать теоремы о связи решений неоднородной и соответствующей однородной СЛАУ и о структуре общего решения неоднородной СЛАУ.